Signe d'une fonction quadratique

Exercice| [5221] | 1| Signe d'une fonction quadratique

Compléter, lorsque c'est possible le tableau suivant :

	Discriminant de $f_i(x,y)$	Signe de $f_i(x,y)$	Max/Min en $(0,0)$
$f_1(x,y) = 3x^2+xy-2y^2$			
$f_2(x,y) = 6x^2+xy-2y^2$			
$f_3(x,y) = x^2+4xy+8y^2$			
$f_4(x,y) = x^2-3xy+8y^2$			
$f_5(x,y) = x^2-xy+y^2$			
$f_6(x,y) = 4x^2-2xy+y^2$			

Pistes de réflexion

Pour chacune des fonctions quadratiques proposées :

- On calculera le discriminant ;
- Le signe du discriminant permettra de conclure quant au signe de la fonction quadratique ;
- La stabilité du signe de la fonction quadratique permettra de conclure sur la nature de l'extremum en $(0,0)$.

Exercice| [5218] | 2| Signe d'une fonction quadratique

On considère la fonction quadratique f suivante : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 4x^2-12xy+9y^2 \end{array} \right.$.

(1). Calculer le discriminant de f. Peut-on en déduire le signe de f ?

(2). Déterminer alors une expression de f permettant de donner le signe de cette dernière sur $\mathbb{R}^2$.

(3). Préciser l'ensemble des points en lesquels f présente un extremum.

Pistes de réflexion

(1). On ne peut obtenir le signe de f dès lors que son discriminant est nul.

(2). On essaiera de factoriser $f(x,y)$ à l'aide d'une identité remarquable.

(3). Un carré est nul uniquement en zéro.

Exercice| [5219] | 3| Signe d'une fonction quadratique

On considère la fonction quadratique f suivante : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 9x^2-6xy+y^2 \end{array} \right.$.

(1). Calculer le discriminant de f. Peut-on en déduire le signe de f ?

(2). Déterminer alors une expression de f permettant de donner le signe de cette dernière sur $\mathbb{R}^2$.

(3). Préciser l'ensemble des points en lesquels f présente un extremum.

Pistes de réflexion

(1). On ne peut obtenir le signe de f dès lors que son discriminant est nul.

(2). On essaiera de factoriser $f(x,y)$ à l'aide d'une identité remarquable.

(3). Un carré est nul uniquement en zéro.

Exercice| [5220] | 4| Signe d'une fonction quadratique

On considère la fonction quadratique f suivante : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -9x^2+12xy-4y^2 \end{array} \right.$.

(1). Calculer le discriminant de f. Peut-on en déduire le signe de f ?

(2). Déterminer alors une expression de f permettant de donner le signe de cette dernière sur $\mathbb{R}^2$.

(3). Préciser l'ensemble des points en lesquels f présente un extremum.

Pistes de réflexion

(1). On ne peut obtenir le signe de f dès lors que son discriminant est nul.

(2). On essaiera de factoriser $f(x,y)$ à l'aide d'une identité remarquable.

(3). Un carré est nul uniquement en zéro.

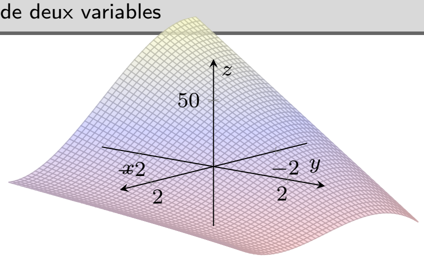
Étude de points critiques et extremum locaux

Exercice| [5214] | 5| Extremum d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + 3xy - 15x - 12y \end{array} \right.$$

dont on donne ci-contre le graphe.



(1). Montrer que l'ensemble des points critiques de f est $\{(2,1), (1,2), (-1,-2), (-2,-1)\}$.

(2). Compléter le tableau de valeurs suivants :

(x,y)	$(2,1)$	$(1,2)$	$(-1,-2)$	$(-2,-1)$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$				
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$				
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$				

(3). On rappelle que pour $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ point critique de f, on associe la fonction quadratique q donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)\, x^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\, y^2$$

Compléter lorsque c'est possible, le tableau ci-dessous :

Point critique	Expression de $q(x,y)$	Discriminant de $q(x,y)$	Signe de $q(x,y)$
$(2,1)$			
$(1,2)$			
$(-1,-2)$			
$(-2,-1)$			

pour en déduire la nature des points critiques de f.

(4). On se propose dans cette question de s'assurer que f ne présente pas d'extremum au point critique $(1,2)$.

On considère alors les deux fonctions $h_1 : y \longmapsto f(1,y)$ et $h_2 : x \longmapsto f(x, 3-x)$.
Compléter les deux tableaux de variations suivants :

y	$1,5$ $2,5$
Variations de h_1	

x	$0,5$ $1,5$
Variations de h_2	

Qu'en conclure ?

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis les points en lesquels elles s'annulent simultanément.

(2). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 2 de f puis de les évaluer aux points considérés.

(3). On exploitera les calculs précédents pour obtenir l'expression de $q(x,y)$, son discriminant et son signe, et identifier alors les points critiques dont on peut expliciter la nature.

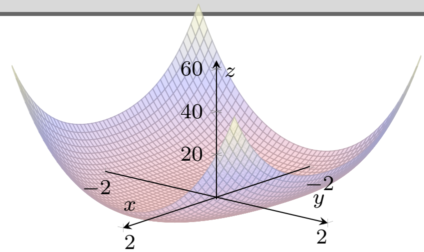
(4). Les deux fonctions h_1 et h_2 correspondent à des coupes du graphe de f dans des directions différentes. Leurs variations permettent de visualiser le « comportement » de la fonction f au voisinage du point considéré.

Exercice| [5215] | 6| Extremum d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2 - y^2\right) \end{array} \right.$$

dont on donne ci-contre le graphe.



(1). Montrer que l'ensemble des points critiques de f est $\{(0,0), (1,0), (-1,0)\}$.

(2). Compléter le tableau de valeurs suivants :

(x,y)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$			
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$			
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$			

(3). On rappelle que pour $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ point critique de f, on associe la fonction quadratique q donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)\,x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)\,xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\,y^2$$

Compléter lorsque c'est possible, le tableau ci-dessous :

Point critique	Expression de $q(x,y)$	Discriminant de $q(x,y)$	Signe de $q(x,y)$
$(0,0)$			
$(1,0)$			
$(-1,0)$			

pour en déduire la nature des points critiques de f.

(4). On se propose dans cette question de s'assurer que f ne présente pas d'extremum au point critique $(0,0)$.
On considère alors les deux fonctions $h_1 : x \longmapsto f(x,x)$ et $h_2 : x \longmapsto f(x,0)$.
Compléter les deux tableaux de variations suivants :

x	$-0,5$ $\qquad$ $0,5$
Variations de h_1	

x	$-0,5$ $\qquad$ $0,5$
Variations de h_2	

Qu'en conclure ?

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis les points en lesquels elles s'annulent simultanément.

(2). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 2 de f puis de les évaluer aux points considérés.

(3). On exploitera les calculs précdents pour obtenir l'expression de $q(x,y)$, son discriminant et son signe, et identifier alors les points critiques dont on peut expliciter la nature.

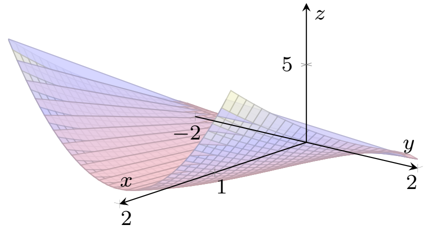
(4). Les deux fonctions h_1 et h_2 correspondent à des coupes du graphe de f dans des directions différentes. Leurs variations permettent de visualiser le « comportement » de la fonction f au voisinage du point considéré.

Exercice| [5216] | 7| Extremum d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\left((\ln(x))^2 + y^2\right) \end{array} \right.$$

dont on donne ci-contre le graphe.



(1). Montrer que l'ensemble des points critiques de f est $\left\{(1,0), \left(\dfrac{1}{e^2}, 0\right)\right\}$.

(2). Compléter le tableau de valeurs suivants :

(x,y)	$(0,0)$	$\left(\dfrac{1}{e^2}, 0\right)$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$		

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$		
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$		

(3). On rappelle que pour $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ point critique de f, on associe la fonction quadratique q donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)\,x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)\,xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\,y^2$$

Compléter lorsque c'est possible, le tableau ci-dessous :

Point critique	Expression de $q(x,y)$	Discriminant de $q(x,y)$	Signe de $q(x,y)$
$(0,0)$			
$\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}, 0\right)$			

pour en déduire la nature des points critiques de f.

(4). On se propose dans cette question de s'assurer que f ne présente pas d'extremum au point critique $\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}, 0\right)$.

On considère alors les deux fonctions $h_1 : x \longmapsto f(x, 0)$ et $h_2 : y \longmapsto f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}, y\right)$.

Compléter les deux tableaux de variations suivants :

x	$-0,5$	$0,5$
Variations de h_1		

y	$-0,5$	$0,5$
Variations de h_2		

Qu'en conclure ?

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis les points en lesquels elles s'annulent simultanément.

(2). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 2 de f puis de les évaluer aux points considérés.

(3). On exploitera les calculs précdents pour obtenir l'expression de $q(x,y)$, son discriminant et son signe, et identifier alors les points critiques dont on peut expliciter la nature.

(4). Les deux fonctions h_1 et h_2 correspondent à des coupes du graphe de f dans des directions différentes. Leurs variations permettent de visualiser le « comportement » de la fonction f au voisinage du point considéré.

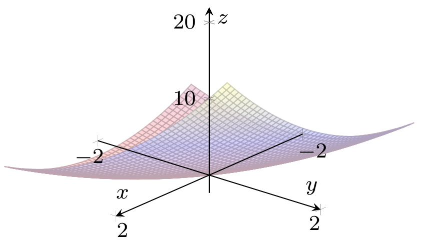
Recherche d'extremum globaux

Exercice| [5217] | 8| Recherche d'extremums globaux

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y \end{array}\right.$$

dont on donne ci-contre le graphe.



(1). Montrer que f ne présente qu'un seul point critique, le point $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

(2). Déterminer la nature de ce dernier.

(3). Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$.

En déduire le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher les dérivées partielles de f puis les points en lesquels elles s'annulent simultanément.

(2). Les extremums de f sont à chercher parmi les points critiques de f sur l'intérieur de $\mathcal{D}$ et sur le bord de $\mathcal{D}$.

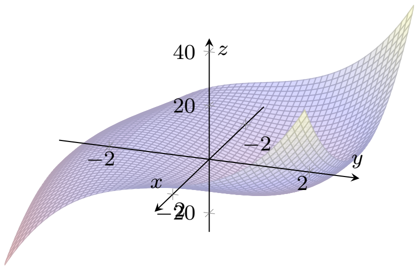
(3). Une fois l'expression de $f(x,y)$ établie, il restera à remarquer que f ne peut pas valoir moins que $-\frac{7}{3}$ et que cette valeur est atteinte pour un couple (x,y) à déterminer.

Exercice| [3864] | 9| Absence d'extremum global

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^3 + \left(x^2 - 6\right) + x^2 \end{array} \right.$$

dont on donne ci-contre le graphe.



(1). Montrer que l'ensemble des points critiques de f est $\left\{\left(0,-\sqrt{2}\right), \left(0,\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{6},-1\right), \left(-\sqrt{6},-1\right)\right\}$.

(2). Compléter le tableau de valeurs suivants :

(x,y)	$\left(0,-\sqrt{2}\right)$	$\left(0,\sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{6},-1\right)$	$\left(-\sqrt{6},-1\right)$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$				
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$				
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$				

(3). On rappelle que pour $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ point critique de f, on associe la fonction quadratique q donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)\, x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)\, y^2$$

Compléter lorsque c'est possible, le tableau ci-dessous :

Point critique	Expression de $q(x,y)$	Discriminant de $q(x,y)$	Signe de $q(x,y)$
$\left(0,\sqrt{2}\right)$			
$\left(0,-\sqrt{2}\right)$			
$\left(\sqrt{6},-1\right)$			
$\left(-\sqrt{6},-1\right)$			

pour en déduire la nature des points critiques de f.

(4). À l'aide de l'application $f\left(\sqrt{6},\bullet\right) : y \longmapsto f\left(\sqrt{6},y\right)$, montrer que f ne possède ni minimum global ni maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis les points en lesquels elles s'annulent simultanément.

(2). On commencera par chercher les dérivées partielles d'ordre 2 de f puis de les évaluer aux points considérés.

(3). On exploitera les calculs précdents pour obtenir l'expression de $q(x,y)$, son discriminant et son signe, et identifier alors les points critiques dont on peut expliciter la nature.

(4). Il suffira de montrer que la fonction proposée n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$.