Calcul de dérivées partielles

Exercice| [3754] | 1| Calcul de dérivées partielles

On considère $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + xy\mathrm{e}^{x-y} \end{array} \right.$.

Vérifier que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & y(x+1)\mathrm{e}^{x-y} + 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & -x\mathrm{e}^{x-y}(y-1) \end{array} \right.$.

Pistes de réflexion

- Techniquement parlant, il s'agit de dériver la fonction $x \longmapsto f(x,y)$ à y fixé, et la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ à x fixé.
- Il reste à mettre en forme les résultats.

Exercice| [3873] | 2| Calcul de dérivées partielles

(1). Pour $g : (x,y) \longmapsto \ln\left(x^2+y^2\right)$, vérifier que l'on a bien :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) & = & \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) & = & \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array} \right.$$

(2). Pour $h : (x,y) \longmapsto \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, , vérifier que l'on a bien :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$$

Pistes de réflexion

(1). On commencera par s'assurer que les dérivées partielles de g existent en s'intéressant à la dérivabilité des applications partielles, puis on procédera au calcul à proprement parlé, où techniquement parlant, il suffira de dériver les deux fonctions $x \longmapsto g(x,y)$ et $y \longmapsto g(x,y)$.

(2). On commencera par s'assurer que les dérivées partielles de h existent en s'intéressant à la dérivabilité des applications partielles, puis on procédera au calcul à proprement parlé, où techniquement parlant, il suffira de dériver les deux fonctions $x \longmapsto h(x,y)$ et $y \longmapsto h(x,y)$.

Exercice| [3878] | 3| Dérivées partielles secondes

Soit $f : (x,y) \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

(1). Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(2). Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \dfrac{6x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & \dfrac{8yx}{(x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & \dfrac{-2x^2+6y^2}{(x^2+y^2)^3} \end{array} \right.$$

Pistes de réflexion

(1). Il s'agira de justifier que les dérivées partielles premières existent dans un premier temps et qu'elles sont continues, puis que les dérivées partielles secondes existent et sont continues.

(2). On procèdera au calcul effectif des dérivées partielles premières en dérivant les deux fonctions $x \longmapsto f(x,y)$ et $y \longmapsto f(x,y)$, puis on s'intéressera aux dérivées partielles premières des deux fonctions $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Représenter un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et applications

Exercice| [3879] | 4| Représentation de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.
Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

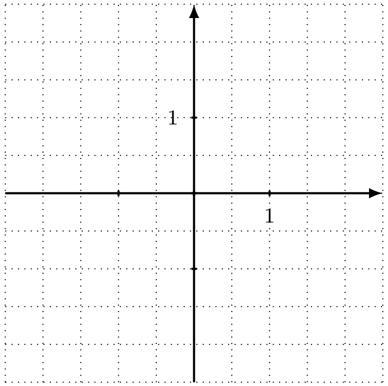
$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0,\ x+y \leq 1\right\}$$

$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [-1;3],\ x+y \leq 1\right\}$$

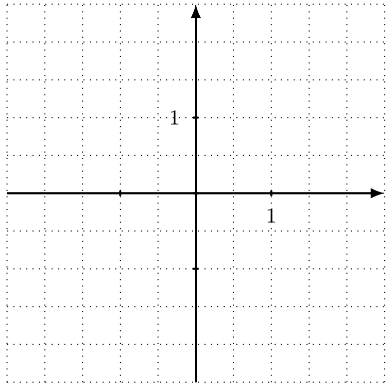
$$A_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0, x+y < 1\right\}$$

$$A_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

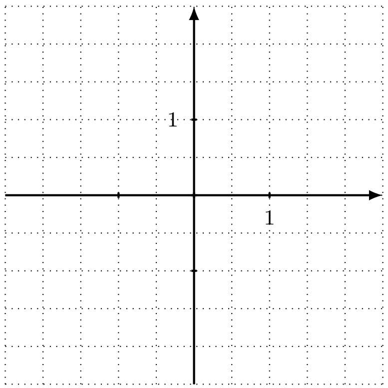
A_1



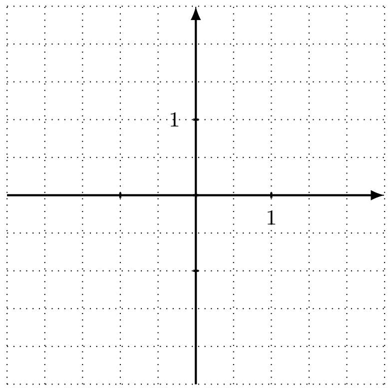
A_2



A_3



A_4



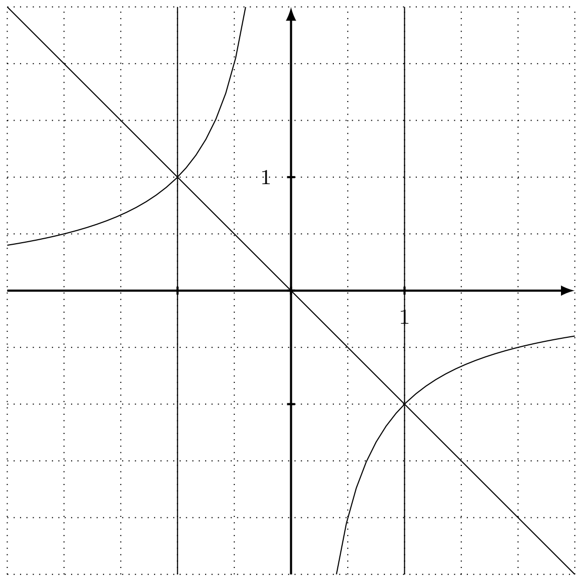
Pistes de réflexion

- Pour l'ensemble des parties demandées, on remarquera qu'il s'agit soit d'une intersection de demi-plan délimités soit une intersection entre un demi-plan et un disque.

Exercice| [3875] | 5| Ensemble de définition et dérivées partielles

Soit $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{1-y^2} \ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

(1). Représenter l'ensemble de définition $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ de f.



(2). Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

(3). Montrer alors que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad 2yf(x, y) + \left(1 - x^2\right) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \left(1 - y^2\right) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier le domaine de définition de f par des conditions sur x et y, que l'on représentera ensuite dans le plan.

(2). On justifiera la classe de la fonction f sur $\mathcal{D}$ par opération sur les fonctions de même classe.

(3). On procèdera dans un premier temps au calcul des dérivées partielles de f, puis on vérifie qu'elles satisfont la relation proposée.

Dérivées partielles et composition

Exercice| [4006] | 6| Dérivées de composées de fonctions de plusieurs variables

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On définit alors $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & F(x, y) = f(x + \varphi(y)) \end{array} \right.$.

(1). Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(2). Montrer que : $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0.$

Pistes de réflexion

(1). On obtiendra le caractère $\mathcal{C}^2$ de F par composition et opérations sur les fonctions de classe $\in$.

(2). Il s'agira de calculer les dérivées partielles premières de F dans un premier temps, puis les dérivées partielles secondes, en fonction de f et φ. Puis on s'assurera que la somme demandée est bien nulle.

Exercice| [1546] | 7| Dérivée d'une fonction de plusieurs variables définie par une intégrale

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Pistes de réflexion

- On pourra introduire Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ pour remplacer l'intégrale par une composition de fonctions.
- Il restera alors à établir le caractère $\mathcal{C}^1$ de f par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'obtention des dérivées partielles de f se fera ensuite directement.

Exercice| [3920] | 8| Fonctions harmoniques

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est dite harmonique sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Dans tout cet exercice, on suppose que f est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

(1). On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que les applications $h_1 : (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $h_2 : (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $h_3 : (x,y) \longmapsto x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont aussi harmoniques.

(2). On suppose de plus dans cette fonction qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi\left(x^2+y^2\right)$$

(a). Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de φ et de ses dérivées.

(b). Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

(c). En déduire l'expression de f.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de calculer pour chaque fonction proposée les dérivées partielles d'ordre 2 en utilisant le fait que f est elle même harmonique et justifier l'utilisation du théorème de Schwarz.

(2).(a). On utilise la formule pour les dérivées de fonctions composées pour les fonctions numériques pour calculer les dérivées partilles de f.

(b). On exploite le fait que f est harmonique pour obtenir une équation différentielle dont φ est solution.

(c). On revient à f en exploitant la forme de φ.