Orthogonalité et projection orthogonale

Exercice| [1624] | 1| Construction de base orthonormée

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on considère F le sous-espace vectoriel d'équation :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Trouver une base orthonormée de F et de $F^{\perp}$.

Pistes de réflexion

- On commencera par chercher une base de F et sa dimension.
- À partir de la base obtenue, on construira pas à pas une base orthogonale, puis orthonormée de F.

Exercice| [4326] | 2| Projection orthogonale

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\mathcal{P}$ où

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$$

Pistes de réflexion

- On connaît la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe permettant la définition de p.
- Il restera à obtenir une telle base, puis de mobiliser ensuite les formules de changement de bases.

Exercice| [4418] | 3| Projection et distance à un sous-espace

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique et on considère F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

(1). Déterminer une base orthonormée F.

(2). Soit p_F la projection orthogonale sur F et $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $p_F(x, y, z, t)$.

(3). Déterminer la distance de $(1, -1, 1, 2)$ à F.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher une base de F et sa dimension et à partir de la base obtenue, on construira pas à pas une base orthogonale, puis orthonormée de F.

(2). La connaissance d'une base orthonormée de F permet d'appliquer la formule de calcul donnant le projeté d'un vecteur sur un sous-espace.

(3). On mobilisera la formule donnant la distance d'un vecteur à un sous-espace qui fait intervenir le projeté de ce vecteur sur ce sous-espace.

Exercice| [4374] | 4| Matrice d'une symétrie orthogonale

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique.Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale s par rapport à F où.

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\right\}$$

Pistes de réflexion

- On remarquera tout d'abord que l'on a la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ où p désigne la projection orthogonale sur F.
- On commencera par chercher une base de F.
- On utilisera alors le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour construire une base orthonormée de F.
- On pourra alors exprimer la projection orthogonale sur F, puis en déterminer sa matrice dans la base canonique.
- On concluera en interprétant matriciellement la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ pour obtenir la matrice demandée.

Endomorphismes et produit scalaire

Exercice| [1421] | 5| Conservation du produit scalaire

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et de sa norme associée.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application telle que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\| \text{ et } \varphi\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$$

(1). Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(u)\| = \|u\|$.

(2). Montrer que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \varphi(u) \,|\, \varphi(v) \rangle = \langle u \,|\, v \rangle$.

(3). En déduire que φ est linéaire.

Exercice| [4643] | 6| Isométrie

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|v\| = 1$ et $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & u - 2\langle u \,|\, v \rangle v \end{array}\right.$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

(2). Montrer que f est telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| = 1$.

Exercice| [4325] | 7| Endomorphisme antisymétrique

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x \,|\, f(x) \rangle = 0.$

(1). Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = -\langle x \,|\, f(y) \rangle$.

(2). Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

(3). Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda = 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(4). Soit $\mathcal{B}$ la famille obtenue comme réunion d'une base orthonormale de $\mathrm{Im}\,(f)$ et d'une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

(5). Quelle est la forme de la matrice f dans $\mathcal{B}$?

Produit scalaire et écriture matricielle

Exercice| [0887] | 8| Noyau et transposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(1). Rappeler la définition de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

(2). Montrer que $\mathrm{Ker}\,\left({}^tAA\right) = \mathrm{Ker}\,(A)$.

Pistes de réflexion

(1). C'est du cours...

(2). On exploitera le lien entre AX, ${}^tAAX$ et $\|AX\|$ pour obtenir l'égalité d'ensembles demandée.

Exercice| [1423] | 9| Produit scalaire et écriture matricielle

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que :

$$\left(\forall\,(X, Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2\,,\, X^TAY = X^TBY\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\,A = B\,)$$

Pistes de réflexion

- On raisonnement par double implication, étant entendu qu'un sens est évident.
- On traduira $X^TAY = X^TBY$ par une condition d'orthogonalité du vecteur $AY - BY$ à tous les autres...

Autour de Cauchy-Schwarz

Exercice| [1419] | 10| Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall\,(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq n^2$

Pistes de réflexion

- On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les « bons » vecteurs.
- La positivité de la famille des x_i doit nous mettre sur la voie pour expliciter ces derniers.

Exercice| [1573] | 11| Produit scalaire

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

Pistes de réflexion

- On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les « bons » vecteurs.

Exercice| [1565] | 12| Inégalité et produit scalaire

(1). On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \bullet\,|\bullet \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$.

Montrer l'inégalité : $\quad \left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$

(2). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que : $\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2.$

Étudier le cas d'égalité.

Pistes de réflexion

(1). On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les « bons » vecteurs.

(2). La remarque vaut là encore...le cas d'égalité provenant du fait que ce dernier se produit dans lorsque les vecteurs utilisés sont colinéaires.