## Exemple de matrices aléatoires

### Exercice| [5152] | 1| Matrices aléatoires | G2E 2018 Filière BCPST

Soit $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$ ù $X$ désigne une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,4)$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Exprimer à l'aide de la fonction de répartition $\Phi$ de la loi normale centrée réduite, la probabilité :

**(1).** $p_1$ que la matrice $M$ possède deux valeurs propres réelles distinctes.

**(2).** $p_2$ que la matrice $M$ possède des valeurs propres complexes non réelles.

**(3).** $p_3$ que la matrice $M$ possède deux valeurs propres imaginaires pures.

#### Pistes de réflexion

**(1).** On pourra dans un premier temps s'intéresser á l'inversibilité de la matrice $M - \lambda \mathrm{I}_2$ par le calcul de son déterminant que l'on traduira ensuite en terme de probabilité portant sur des événements décrits à l'aide $X$.

**(2).** On se contente de reprendre les discussions précédentes.

**(3).** On se contente de reprendre les discussions précédentes.

### Exercice| [5148] | 2| Matrice aléatoire

**(1).** On considère un réel $a$ quelconque et la matrice $A$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Montrer que $A$ est inversible si et seulement $a \neq 0$.

**(2).** On considère une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $1$ dont on note $F$ la fonction de répartition.
On note alors $Y$ une variable aléatoire donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y(\Omega) & = & \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ [Y = k] & = & [k \leq X < k+1] \end{array} \right.$$

Ainsi, $Y$ prend la valeur $k$ lorsque $X$ prend une valeur dans l'intervalle $[k; k+1[$.

**(a).** Exprimer $\mathbb{P}([Y = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en fonction de $F$, et vérifier que l'on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k]) = 1$.

**(b).** On pose $Z = Y + 1$. Vérifier que $Z$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**(c).** Montrer alors que $Y$ admet une espérance une variance que l'on déterminera.

**(3).** On considère alors la matrice aléatoire $M$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

**(a).** Calculer la probabilité que $M$ soit inversible.

**(b).** Calculer la probabilité que $M$ soit diagonalisable.

#### Pistes de réflexion

**(1).** $A$ étant triangulaire supérieure, son inversibilité est liée à la non nullité de ses termes diagonaux.

**(2). (a).** Par définition de $Y$, on a $\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([k \leq X < k+1])$ et comme $X$ est une variable à densité on a $\mathbb{P}([k \leq X < k+1]) = \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f$ est une densité de $X$. On remarquera alors qu'il y a un lien direct entre $\sum \mathbb{P}([Y = k])$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**(b).** Il s'agit d'expliciter $\mathbb{P}([Z = k])$ à partir de la loi de $Y$ et faire apparaître l'expression de la probabilité d'une loi géométrique.

**(c).** $Z$ ayant une espérance, le reste s'obtient par opérations sur l'espérance et la variance.

**(3). (a).** On reprend le raisonnement de la question initiale pour ce qui concerne l'inversibilité de la matrice $M$, et le traduire en terme dévénements portant sur $Y$.

**(b).** On réfléchira aux conditions que doit satisfaire une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure pour être diagonalisable et le traduire en terme dévénements portant sur $Y$.

## Modélisation à l'aide de variables aléatoires à densité

### Exercice| [5149] | 3| | G2E 2018 Filière BCPST

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à $2$.
$n$ véhicules numérotés de $1$ à $n$ sont engagés dans un rallye automobile, et finissent une étape entre minuit et une heure du matin.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $U_i$ est la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée du véhicule numéro $i$.
On suppose que les variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots U_n$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi uniforme sur $[0; 1]$.

**(1).** Soit $i \in ]0; 1[$. On note $N_t$ la variable aléatoire égale au nombre de véhicule arrivés au plus tard à l'instant $t$.
Justifier que $N_t(\Omega) = [\![0; n]\!]$ puis déterminer la loi de la variable $N_t$.

**(2).** Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note $T_i$ la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée du véhicule classé en $i^{\text{e}}$ position. On remarque en particulier que $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n$.

**(a).** Déterminer la loi de la variable aléatoire $T_n$.

**(b).** Déterminer la loi de la variable aléatoire $T_1$.

#### Pistes de réflexion

**(1).** $N_t$ compte un nombre de succès dans un processus de Bernoulli, donc suit une loi binomiale, et son paramètre est donc $\mathbb{P}([U_i \leq t]) = t$.

**(2). (a).** On remarque que $T_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ dont on cherchera la fonction de répartition.

**(b).** On remarque que $T_1 = \min(U_1, \ldots, U_n)$ dont on cherchera la fonction de répartition.

### Exercice| [5150] | 4| Variables aléatoires à densité et probabilités | G2E 2018 Filière BCPST

On suppose que l'intensité d'un tremblement de terrre est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a$, et que le nombre $N$ de tremblements de terre par an est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
On désigne alors par $Y$ la variable aléatoire égale à l'intensité maximale annuelle de ces tremblements de terre.

**(1).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question qu'il y a eu $n$ tremblements de terre.
On note alors $X_i$ la variable aléatoire égale à l'intensité du $i^e$ tremblement de terre.

- **(a).** Exprimer $Y$ en fonction de $X_1$, $X_2$,..., $X_n$.
- **(b).** En supposant les tremblements de terre indépendants dans leur ensemble, déterminer $\mathbb{P}_{[N=n]}([Y \leq y])$ ù $y \in \mathbb{R}$.

**(2).** Déterminer alors la fonction de répartition de $Y$.

#### Pistes de réflexion

**(1). (a).** On remarque que $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

**(b).** On cherche donc $\mathbb{P}_{[N=n]}([Y \leq y])$ que l'on obtient directement en utilisant l'indéndance des variables aléatoires $X_i$.

**(2).** Le calcul précédent induit d'utiliser le système complet d'événements associé à $N$ pour expliciter $\mathbb{P}([Y \leq k])$ pour permettre d'obtenir la fonction de répartition de $Y$.

### Exercice| [5151] | 5| Variables aléatoires á densité et probabilités | GE2E 2018 Filière BCPST

La nouvelle règlementation des baudriers d'escalade impose deux points de fixation de sécurité pour la corde sur ce dernier.
On considère que le grimpeur est en sécurité tant qu'un des deux points de fixation est en état.
On désigne par $X_1$ et $X_2$ les deux variables aléatoires égales à la durée de vie de chacun de ces accessoires de sécurité, que l'on suppose suivre une loi exponentielle de même paramètre $\lambda$ et indépendantes.
On note alors $T$ la variable aléatoire égale au temps pendant lequel le baudrier sera considéré comme sécurisé.

**(1).** Déterminer la fonction de répartition $F_T$ de $T$.

**(2).** $F_T$ satisfait-elle toutes les conditions pour être la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Si oui, exprimer cette densité.

**(3).** Montrer que $T$ admet une espérance mathématique, puis la calculer.

#### Pistes de réflexion

**(1).** On remarque que $[T \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t]$ et on utilise l'indépendance des événements pour obtenir la fonction de répartition de $T$.

**(2).** On se rappellera que, lorsque cela a du sens, $F_T'(t) = f_T(t)$ où $f_t$ désigne une densité de $T$.

**(3).** Il s'agira d'établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,\mathrm{d}t$ puis d'en calcule la valeur.

### Exercice| [5153] | 6| Fiabilité d'une machine à café | G2E 2018 Filière BCPST

Une machine à café au comptoir d'un bar est composée de trois groupes de distribution indépendants.
On note $X_1$, $X_2$ et $X_3$ les variables aléatoires égales au temps de bon fonctionnement de chacun de ces groupes.
On suppose que $X_1$, $X_2$ et $X_3$ suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
Le service au bar est assuré normalement tant que deux groupes au moins sont en état de marche.
On note $T$ la variable aléatoire égale au temps pendant lequel le service n'est pas perturbé.

**(1).** Déterminer la fonction de répartition $F_T$ de $T$.

**(2).** $F_T$ satisfait-elle toutes les conditions pour être la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ? Si oui, exprimer cette densité.

**(3).** Montrer que $T$ admet une espérance mathématique, puis la calculer.

#### Pistes de réflexion

**(1).** On traduira $[T \leq t]$ à l'aide des événements $[X_i \leq t]$ et $[X_j > t]$, puis on utilisera l'indépendance de ces derniers, pour obtenir la fonction de répartition de $T$.

**(2).** On se rappellera que, lorsque cela a du sens, $F_T'(t) = f_T(t)$ où $f_t$ désigne une densité de $T$.

**(3).** Il s'agira d'établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,\mathrm{d}t$ puis d'en calcule la valeur.