Fonctions de répartition et densité

Exercice| [5140] | 1| Fonction de répartition et densité

On suppose que X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction :

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2x+2} & \text{si } 1 < x \end{cases} \end{array} \right.$$

(1). Vérifier que X est une variable aléatoire à densité.

(2). Donner alors une densité de probabilité pour X.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera que F_X satisfait toutes les conditions de régularité, et croissance et de limites pour être une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

(2). On se souviendra que l'on a en tout point où cela a du sens que : $F'_X(x) = f(x)$.

Exercice| [5141] | 2| Densité de probabilité

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha t\,(t-2) & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \end{cases} \end{array} \right.$

Quelle valeur donner au réel α pour que f puisse être une densité de probabilité pour une variable aléatoire ?

Pistes de réflexion

- On s'assure dans un premier temps que la fonction f possède toutes les propriétés de régularité attendues pour une fonction densité.
- On ajustera le paramètre α à l'aide de la condition $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice| [5142] | 3| Densité et fonction de répartition

On considère la fonction f donné par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \end{array} \right.$

(1). Vérifier que f peut être une densité de probabilité.

(2). Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera dans une premier temps que f satisfait toutes les conditions de régulartié nécessaires pour être une densité, puis que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$?

(2). On se rappelera du lien fondamental entre densité et fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculs de moments pour une variable aléatoire à densité

Exercice| [5143] | 4| Calcul d'espérance

On considère la fonction f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1-|t| & \text{si } t \in [-1;1] \\ 0 & \text{si } t \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases} \end{array} \right.$$

(1). Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(2). Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que f admet une espérance et une variance, puis les déterminer.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera que f satisfait toutes les conditions de régularité pour être une densité de probabilité, et on s'assurera que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). L'existence de l'espérance et de la variable de X repose sur la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, qu'il faudra établir en premier lieu, avant ensuite de s'intéresser à leurs valeurs que l'on exploitera avec la formule de Huygens.

Exercice| [5147] | 5| Espérance d'une variable aléatoire à densité

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \dfrac{\alpha}{3^t} & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \end{array} \right.$

où α est un paramètre réel.

(1). Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité.

(2). Soit alors X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera que f satisfait toutes les conditions de régularité pour être une densité de probabilité, et on ajustera la valeur du paramètre λ en utilisant le fait que l'on doit avoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). L'existence de l'espérance de X repose sur la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ qu'il faudra établir en premier lieu, avant ensuite de s'intéresser à sa valeur.

Exercice| [5144] | 6| Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité

On considère la fonction f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rll} \lambda t^2 (1-t)^3 & \text{si} & t \in [0;1] \\ 0 & \text{si} & t \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

où λ est un paramètre réel.

(1). Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité.

(2). On considère alors X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et une variance, puis les calculer.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera que f satisfait toutes les conditions de régularité pour être une densité de probabilité, et on ajustera la valeur du paramètre λ en utilisant le fait que l'on doit avoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). L'existence de l'espérance et de la variable de X repose sur la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, qu'il faudra établir en premier lieu, avant ensuite de s'intéresser à leurs valeurs que l'on exploitera avec la formule de Huygens.

Image de variables à densité

Exercice| [5145] | 7| Image d'une variable aléatoire

On considère la fonction f donné par : $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \end{array} \right.$

(1). Vérifier que f peut être une densité de probabilité.

(2). Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

(3). On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-X}}$.

Montrer que Y suit la loi uniforme sur $intff0,1$.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera dans une premier temps que f satisfait toutes les conditions de régulartié nécessaires pour être une densité, puis que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). On se rappelera du lien fondamental entre densité et fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(3). On exprimera la fonction de répartition de Y à l'aide de celle de X pour reconnaître alors celle de la loi uniforme.

Exercice| [5146] | 8| Espérance d'une variable aléatoire à densité

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{si} & t < 1 \\ \dfrac{1}{2t\sqrt{t}} & \text{si} & t \geq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$

(1). Vérifier que f est une densité de probabilité.

Pour la suite, on désigne par X une variable aléatoire de densité f.

(2). Déterminer la fonction de répartition F de X.

(3). Montrer que f n'admet pas d'espérance.

(4). On considère alors la variable aléatoire Z donnée par : $Z = \ln(X)$.

- **(a).** Déterminer la fonction de répartition de Z.
- **(b).** Quelle est alors la loi suivie par Z ?

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera que f satisfait toutes les conditions de régularité pour être une densité de probabilité, et on s'assurera que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). On se rappelera du lien fondamental entre densité et fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(3). L'existence de l'espérance de X repose sur la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

(4). **(a).** On exprimera la fonction de répartition de Z à l'aide de celle de X.

(b). On espère que les calculs précédents nous ramènent à une loi usuelle. . .