Interprétation de calculs d'images | Diagonalisation d'endomorphismes

Exercice| [5131] | 1| Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z, -x+y+z, x) \end{array} \right.$$

et on désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1). Déterminer les images par f des vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

(2). Vérifier que $f(e_2) = e_2$.

(3). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Déduire de ce qui précède la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

(5). Qu'en conclure pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On procède au calcul des images demandées à l'aide de l'expression analytique de f.

(2). On procède de même.

(3). On pourra par exemple utiliser la caractérisation des familles bases par le rang de la matrice de la famille de vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(4). Les calculs précédents donnent tous les éléments pour construire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ en revenant au mode de construction de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.

(5). La matrice obtenue précédemment étant diagonale, par définition. . .

Exercice| [5132] | 2| Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, 2x+2y+2z, y+2z) \end{array} \right.$$

et on désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1). f est-il injectif ?

(2). Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur générateur noté u_1.

(3). Déterminer l'image de $u_2 = e_1 - e_3$ par f. Qu'en déduire pour f ?

(4). Quelle est l'image par f du vecteur $u_3 = (1, 2, 1)$?

(5). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(6). Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On pourra revenir à la définition en déterminant tous les vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = \overrightarrow{0}$ et s'assurer qu'il n'y a que le vecteur nul qui satisfait à cette relation, ou exhiber un vecteur de $\mathbb{R}^3$ d'image nulle par f pour mettre en défaut le caractère injectif de f.

(2). On se souviendra qu'être une droite vectorielle est un sous-espace engendré par un seul vecteur. On pourra utiliser à bon escient les éléments techniques de la question précédente.

(3). On procède au calcul en utilisant l'expression analytique de f, et il est fort probable que le résultat obtenu soit colinéaire au vecteur dont on calcul l'image, ce qui donne alors un vecteur propre et une valeur propre pour f.

(4). On procède au calcul en utilisant l'expression analytique de f.

(5). On pourra soit montrer le caractère base de la famille $\mathcal{C}$ en utilisant la caractérisation des familles bases par le rang de leur représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ou alors remarquer qu'il s'agit d'une famille libre car formée de trois vecteurs propres de f associés à 3 valeurs propres distinctes de f.

(6). $\mathcal{C}$ est une base de vecteurs propres de f, donc f est diagonalisable. . .

Exercice| [5133] | 3| Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x-2y-2z, 4-2y-4z, -4x+y+3z) \end{array} \right.$$

et on désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que le vecteur $u_1 = (2, -4, 3)$ appartient au noyau de $f + \operatorname{Id}$.

(2). Montrer que le vecteur $u_2 = e_3 - e_2$ est un vecteur propre pour f associé à la valeur propre 2.

(3). Déterminer le rang de l'application linéaire $f + 2\operatorname{Id}$.

(4). Justifier que le spectre de f est exactement $\{-2, -1, 2\}$. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On détermine l'image de u_1 par $f + \operatorname{Id}$ soit en écrivant au préalable l'expression analytique de $f + \operatorname{Id}$ soit en calculant l'image de u_1 par f pour y ajouter ensuite u_1.

(2). On revient à la définition d'un vecteur propre, en calculant ainsi l'image de u_2 par f pour voir que cette dernière est colinéaire à u_2.

(3). On explicite par exemple la matrice de l'application $f + 2\operatorname{Id}$ pour en déterminer le rang.

(4). Chacune des questions précdentes permet de déterminer une valeur propre pour f. Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}3^3$ qui admet 3 valeurs propres distinctes. . .

Exercice| [5134] | 4| Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+3z, -3z+2y+3z, 3x-z) \end{array} \right.$$

et on désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que 2 est valeur propre de f, et déterminer un vecteur propre u_1 associé à la valeur propre 2.

(2). Montrer que $u_2 = (1, 0, 1)$ est un vecteur propre de f, et préciser la valeur propre associée.

(3). On admet que -4 appartient au spectre de f. Pour quelle valeur du réel t le vecteur $u_3 = (1, 1, t)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -4.

(4). f est-il diagnalisable ? Le cas échéant déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Pistes de réflexion

(1). L'écriture de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ met en évidence que $f(e_2) = 2e_2$ ce qui assure le résultat à établir.

(2). On calcule l'image de u_2 par f en utilisant l'écriture analytique de f et on remarque que cette image est colinéaire à u_2.

(3). On écrit que $f(u_3) = -4u_3$ et on procède ùne identification pour déterminer la valeur de t qui convient.

(4). Les questions précdentes apportent des informations sur les éléments propres de f qui permettront d'établir le caractère diagonalisable ou non de f et c'est clairement avec la base formée par les vecteurs propres u_1, u_2 et u_3 que l'on obtiendra la matrice souhaitée pour f.

Diagonalisation de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice| [5135] | 5| Diagonalisation d'une matrice triangulaire supérieure

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(1). Sans calcul, déterminer les valeurs propres de A.

(2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

(3). La matrice A est-elle diagonalisable. Si oui, déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Pistes de réflexion

(1). Le fait que la matrice est une matrice triangulaire supérieure donne directement les valeurs propres de cette dernière en revenant à la définition.

(2). Déterminer une base d'un sous-espace propre revient à résoudre un système linéaire homogène, mais il pourra être pertinent d'exhiber des vecteurs propres pour aller plus vite.

(3). On mobilise les théorèmes de diagonalisation pour conclure, et si la réponse est positive, il suffit d'utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres précdemment trouvés pour construire les matrices D et P demandées.

Exercice| [5136] | 6| Diagonalisation d'une matrice triangulaire supérieure

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(1). Sans calcul, déterminer les valeurs propres de A.

(2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

(3). La matrice A est-elle diagonalisable. Si oui, déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Pistes de réflexion

(1). Le fait que la matrice est une matrice triangulaire supérieure donne directement les valeurs propres de cette dernière en revenant à la définition.

(2). Déterminer une base d'un sous-espace propre revient à résoudre un système linéaire homogène, mais il pourra être pertinent d'exhiber des vecteurs propres pour aller plus vite.

(3). On mobilise les théorèmes de diagonalisation pour conclure, et si la réponse est positive, il suffit d'utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres précdemment trouvés pour construire les matrices D et P demandées.

Exercice| [5137] | 7| Diagonalisation d'une matrice triangulaire supérieure

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(1). Sans calcul, déterminer les valeurs propres de A.

(2). Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

(3). La matrice A est-elle diagonalisable. Si oui, déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

(4). En est-il de même pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Pistes de réflexion

(1). On cherchera les valeurs propres de A en discutant suivant le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.

(2). Déterminer une base d'un sous-espace propre revient à résoudre un système linéaire homogène, mais il pourra être pertinent d'exhiber des vecteurs propres pour aller plus vite.

(3). On mobilise les théorèmes de diagonalisation pour conclure, et si la réponse est positive, il suffit d'utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres précdemment trouvés pour construire les matrices D et P demandées.

(4). On reprend le questionnement précédent.

Recherche d'éléments propres par polynômes de matrices

Exercice| [5138] | 8| Utilisation d'un polynôme de matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que : $A^4 + 3A^3 - A^2 - 3A = (0)$.

(1). Dans cette question, on suppose que λ est une valeur propre de A et que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

(a). Justifier que l'on a $A^2X = \lambda^2 X$, $A^3X = \lambda^3 X$ et $A^4 = \lambda^4 X$.

(b). Montrer que λ est solution de l'équation $\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda = 0$.

(c). En déduire les valeurs propres possibles pour A.

(2). Déterminer alors les valeurs propres de A, et une base de chacun des sous-espaces propres associés à ces dernières.

(3). La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Pistes de réflexion

(1).(a). Puisque $AX = \lambda X$ par hypothèse, il suffit de multiplier par A deux fois à droite cette relation pour obtenir les relatiosn demandées.

(b). On remarquera que $\left(A^4 + 3A^3 - A^2 - 3A\right) X = (0)$ et on développe pour réinvestir les relations précédentes pour ensuite utiliser le fait que X est non nul pour obtenir l'équation demandée.

(c). Il suffit de résoudre l'équation précédente.

(2). On s'assure que chacune des valeurs propres potentielles trouvées précédemment convient, même si de fait on sait que l'une d'entre elle ne peut convenir. . .et on explicite alors une base du sous-espace propre associé.

(3). On mobilise les théorèmes de diagonalisation pour conclure, et si la réponse est positive, il suffit d'utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres précdemment trouvés pour construire les matrices D et P demandées.

Exercice| [5139] | 9| Utilisation d'un polynôme de matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet que : $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3 = (0)$.

(1). Dans cette question, on suppose que λ est une valeur propre de A et que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

(a). Justifier que l'on a $A^2X = \lambda^2 X$ et $A^3X = \lambda^3 X$.

(b). Montrer que la seule valeur propre possible de A est 1.

(2). La matrice A est-elle diagonalisable ?

Pistes de réflexion

(1).(a). Puisque $AX = \lambda X$ par hypothèse, il suffit de multiplier par A deux fois à droite cette relation pour obtenir les relatiosn demandées.

(b). On remarquera que $\left(A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3\right) X = (0)$ et on développe pour réinvestir les relations précédentes pour ensuite utiliser le fait que X est non nul pour obtenir une équation dont seul 1 est solution.

(2). A ne possède qu'une seule valeur propre. . .il est fort peu probable que cette dernière soit diagonalisable, mais il convient de le justifier.

Exercice| [1374] | 10| Polynôme de matrice

(1). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3$ et en déduire que 1 est la seule valeur propre possible de A.

(2). Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Pistes de réflexion

(1). On pourra remarquer que $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3$ est le développement d'une identité remarquable avec le binôme de Newton, puis utiliser le fait que si $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$, alors $A^2X = \lambda^2 X$, etc.

(2). On effectuera un raisonnement par l'absurde pour établir le résultat.