Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

Exercice| [5013] | 1| Combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

(1). Montrer que le vecteur $u = (1, -4, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 2, -1)$ et $v_2 = (1, 5, -1)$.

(2). Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ fixé. Discuter de la compatibilité du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 5 & y \\ -1 & -1 & z \end{array}\right)$.

(3). On désigne alors par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0\right\}$$

Déduire de ce qui précède que $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de déterminer un couple de réels (α, β) tel que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$.

(2). On procèdera à un échelonnement en lignes, de sorte à faire apparaître une ou des équations de compatibilité.

(3). Il y a un lien entre la description de F et la question précédente. Il s'agit simplement de rédiger proprement ce point.

Exercice| [5015] | 2| Combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$$

(1). Montrer que $u_1 = (1, -2, 1)$ est combinaison linéaire de $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$.

(2). Justifier que $u_2 = (2, -1, -1)$ appartient à $\text{Vect}\,(v_1, v_2)$.

(3). Démontrer que $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$.

(4). Que peut-on déduire des écritures $3v_1 = u_1 + u_2$ et $3v_2 = -u_1 + 2u_2$?

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de déterminer un couple de réels (α, β) tel que $u_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

(2). On se souviendra que $\text{Vect}\,(v_1, v_2)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de v_1 et v_2, et il s'agira donc de vérifier que u_2 s'écrit bien comme combinaison linéaire de v_1 et v_2, ce qui reviendra à faire le même travail que précédemment.

(3). La relation permettant de décrire les éléments de F peut s'interpréter comme un système linéaire à 1 équation et 3 inconnus dont il s'agit d'exprimer l'ensemble des solutions pour faire apparaître les triplets solutions comme combinaison linéaire de deux triplets de $\mathbb{R}^3$.

(4). Les deux sous-espaces engendrés par la famille (v_1, v_2) et (u_1, u_2) semblent fortement identiques. . .ce qui est à justifier.

Exercice| [5014] | 3| Combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^4$

On désigne par $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donnée par $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 2, -1, 1)$, $u_2 = (1, 2, -1, 1)$ et $u_3 = (0, -1, -1, 1)$.
On considère alors $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$, et on se propose de caractériser les éléments (x, y, z, t) de F par une ou plusieurs équations portant sur les composantes x, y, z et t d'un tel vecteur.

(1). Montrer que le vecteur $u = (1, 1, -2, 2)$ appartient à F.

(2). Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ fixé. Discuter de la compatibilité du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & -1 & y \\ -1 & -1 & -1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$.

(3). Donner alors une autre description des élements de F.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agira de revenir à la définition de $\text{Vect}\,(F)$ pour s'apercevoir qu'il s'agit d'être capable d'écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

(2). On procède à un échelonnement en lignes pour obtenir une ou des équations de compatibilité.

(3). On traduira les équations de compatibilité obtenues pour décrire les éléments de F.

Exercice| [1898] | 4| Familles de vecteurs

Soient $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(1). Peut-on déterminer deux réels x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\,(v_1, v_2)$?

(2). Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\,(v_1, v_2)$?

Pistes de réflexion

(1). On commence par traduire le fait que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\,(v_1, v_2)$ par l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, 1, y, 1) = \alpha v_1 + \beta v_2$ qui conduira à l'écriture d'un système linéaire dont il s'agira d'étudier la compatibilité.

(2). On reproduit le même raisonnement avec le vecteur $(x, 1, 1, y)$.

Liberté et relations de dépendance

Exercice| [5016] | 5

On considère la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ où :

$$u_1 = (1, 2, -1, 1)\,,\ u_2 = (1, 2, -1, 1)\,,\ u_3 = (0, -1, -1, 1)\,,\ u_4\,(1, 1, -2, 2)$$

On désigne alors par F le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$.

(1). Justifier qu'étudier la liberté de la famille $\mathcal{F}$ revient à résoudre le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

(2). On a effectué un échelonnement réduit en lignes de ce dernier système pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim_L \cdots \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Qu'en déduire pour la famille $\mathcal{F}$?

(3). Montrer que $F = \text{Vect}\,(u_1, u_3)$.

Pistes de réflexion

(1). On reviendra à la définition d'une famille libre (utilisation d'une combinaison linéaire triviale), que l'on traduira par la résolution d'un système.

(2). Il est fort probable que ce système homogène ait une autre solution que la solution triviale.

(3). On exploitera la relation de dépendance obtenue à la question précédente pour exprimer un ou plusieurs vecteurs de $\mathcal{F}$ en fonction d'autres « en nombre plus restreint ».

Exercice| [5017] | 6

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = (1,0,1)\,,\; u_2 = (1,1,1)\,,\; u_3 = (-1,-1,3)\,,\; u_4 = (1,1,-1)$$

et on désigne par $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

(1). Justifier que la famille n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer alors une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

(3). Donner alors une sous-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ telle que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\,(\mathcal{F}')$.

Pistes de réflexion

(1). On dispose d'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$...

(2). On partira d'une combinaison linéaire nulle de ces quatre vecteurs pour établir la relation de dépendance cherchée.

(3). On analysera la relation de dépendance précédente pour exprimer un (ou plusieurs) vecteur(s) en fonction d'autres vecteurs de la famille « en nombre plus restreint ».