Éléments propres par contemplation

Exercice| [5130] | 1| Vecteurs propres provenant de la base canonique

En observant les colonnes des matrices suivantes, donner pour chacune d'entre elles une ou plusieurs valeurs propres, ainsi qu'un vecteur propre associé pour chacune d'entre elles.

Matrice A	Matrice B	Matrice C	Matrice F
$\begin{pmatrix}0&0&1\\3&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&1\\4&3&1\\0&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&4&0\\0&3&-2\end{pmatrix}$
Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)
Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)

Pistes de réflexion

- Si l'on remarque que la colonne C_i est colinéaire à la matrice colonne représentant le ${}^{\text{e}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que le coefficient de colinéarité obtenu est une valeur propre de A et on dispose directement d'un vecteur propre de A.

Exercice| [5128] | 2| Matrice admettant 0 pour valeur propre

En observant les colonnes des matrices suivantes, écrire une combinaison linéaire portant sur une ou plusieurs colonnes, pour établir que 0 est valeur propre de A, puis expliciter le sous-espace propre $E_0(A)$ complètement.

Matrice	Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3	$\dim(E_0)$	Base de E_0
Matrice A: $\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(A) =$		$\dim(E_0(A)) =$	$E_0(A) = \operatorname{Vect}$
Matrice B: $\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&3&3\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(B) =$		$\dim(E_0(B)) =$	$E_0(B) = \operatorname{Vect}$
Matrice C: $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(C) =$		$\dim(E_0(C)) =$	$E_0(C) = \operatorname{Vect}$
Matrice G: $\begin{pmatrix}11&-5&5\\-5&3&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(G) =$		$\dim(E_0(G)) =$	$E_0(G) = \operatorname{Vect}$
Matrice H: $\begin{pmatrix}2&1&0\\2&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(H) =$		$\dim(E_0(H)) =$	$E_0(H) = \operatorname{Vect}$

Pistes de réflexion

- En désignant C_i les colonnes de A, si on remarque par exemple que $C_1 - C_2 + C_3 = (0)$, cela signifie que l'on aura $A\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc que l'on dispose d'un vecteur colonne non nul C tel que $AC = 0.C$ ce qui assure que 0 est valeur propre de A.
- Une fois ce premier vecteur propre exhibé, il s'agira de s'assurer du rang de la matrice A pour voir si $E_0(A)$ est de dimension 1 ou 2, et donc d'être amené ou non à chercher un autre vecteur.

Exercice| [5129] | 3| Vecteur propre trivial

Parmi les matrices suivantes, toutes admettent le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur propre, sauf une...et lorsque c'est le cas, préciser la valeur propre associée.

$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\4&0&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$
Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée

$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&2\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-4&1\end{pmatrix}$
Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée

Pistes de réflexion

- On se souviendra de la formule donnant le terme général du produit de deux matrices, pour remarquer que multiplier une matrice par la matrice colonne proposée revient à calculer la somme de chacun ligne pour chacun des coefficients du produit.

Exploiter le spectre d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice| [5127] | 4| Éléments propres et diagonalisation

Matrice A

$$\begin{pmatrix}11&-5&5\\-5&3&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(A) = \{0, 1, 16\}$

$A = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $A - 0\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_0(A))$

$$A - 0\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}11&-5&5\\-5&3&-3\\5&-3&3\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}5&-3&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim(E_0(A)) =$

Base de $E_0(A)$

Vect

Rang de $A - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(A))$

$$A - 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}10&-5&5\\-5&2&-3\\5&-3&2\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}5&-2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(A)) =$

Base de $E_1(A)$

Vect

Rang de $A - 16\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{16}(A))$

$$A - 16\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}-5&-5&5\\-5&-13&-3\\5&-3&-16\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim(E_{16}(A)) =$

Base de $E_{16}(A)$

Vect

Matrice B

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\3&-2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(B) = \{1, 3, -4\}$

$B = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $B - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(B))$

$$B - 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}0&3&0\\3&-3&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}3&-3&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(B)) =$

Base de $E_1(B)$

Vect

Rang de $B - 3\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3(B))$

$$B - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}-2&3&0\\3&-5&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}2&-3&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim(E_3(B)) =$

Base de $E_3(B)$

Vect

Rang de $B+4\mathrm{I}_3$ | $\dim\left(E_{-4}(B)\right)$

$$B + 4\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\left(E_{-4}(B)\right) =$

Base de $E_{-4}(B)$

Vect

Matrice C

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(C) = \{3, 1, -1\}$

$C = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $C-3\mathrm{I}_3$ | $\dim\left(E_3(C)\right)$

$$C - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\left(E_3(C)\right) =$

Base de $E_3(C)$

Vect

Rang de $C-1\mathrm{I}_3$ | $\dim\left(E_1(C)\right)$

$$C - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\left(E_1(C)\right) =$

Base de $E_1(C)$

Vect

Rang de $C+1\mathrm{I}_3$ | $\dim\left(E_{-1}(C)\right)$

$$C + 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\left(E_{-1}(C)\right) =$

Base de $E_{-1}(C)$

Vect

Matrice F

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(F) = \{-1, 2\}$

$F = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $F+1\mathrm{I}_3$ | $\dim\left(E_3{-}1(F)\right)$

$$F + 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\left(E_{-1}(F)\right) =$

Base de $E_{-1}(F)$

Vect

Rang de $F-2\mathrm{I}_3$ | $\dim\left(E_2(F)\right)$

$$F - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim\left(E_2(F)\right) =$

Base de $E_2(F)$

Vect

Pistes de réflexion

- On se rappelle que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\mathrm{I}_3)$. La connaissance du rang de la matrice $A - \lambda\mathrm{I}_3$ donnera la dimension de $E_\lambda(A)$ par le théorème du rang, et il restera à exploiter la recherche du du rang pour obtenir une famille génératrice de $E_\lambda(A)$.
- On peut ensuite expliciter la matrice diagonale D qui est semblable alors à la matrice A dès lors que l'on a suffisamment d'arguments portant notamment sur la dimension des sous-espaces propres de A pour le faire, ainsi que donner la matrice de passage P permettant de diagonaliser A par la relation de semblablitude $A = PQP^{-1}$.