Éléments caractſistiques d'un projecteur ou d'une symétrie

Exercice| [3925] | 1| Étude d'un projecteur

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Montrer que u est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Pistes de réflexion

- Un projecteur u est caractérisée par le fait que $u \circ u = \ldots$ ce qui matriciellement revient à vérifier que...
- On doit déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ sur lequel on projette et le sous-espace donnant la direction. Il faudra donc chercher les vecteurs invariants et d'image nulle pour identifier ces deux sous-espaces.

Exercice| [3745] | 2| Étude d'une symétrie vectorielle

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

Montrer que f est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments caractéristiques.

Pistes de réflexion

- Une symétrie vectorielle f est caractérisée par le fait que $f \circ f = \ldots$ ce qui matriciellement revient à vérifier que...
- On doit déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ par rapport à qui ont fait la symétrie et le sous-espace donnant la direction. Il faudra donc chercher les vecteurs invariants et ceux transformés en leur opposé pour identifier ces deux sous-espaces.

Obtenir la matrice d'un projecteur ou d'une symétrie

Exercice| [1214] | 3| Matrice d'un projecteur et d'une symétrie vectorielle

On se place dans $\mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B}$ la base canonique.
Soient $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On donne par ailleurs que : $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

et que : $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(1). Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2). On désigne par $F = \operatorname{Vect}(u_1)$ et $G = \operatorname{Vect}(u_2, u_3)$.
On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F de direction G.

(a). Donner les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{F}}(s)$.

(b). Déterminer alors les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra construire la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et conclure à l'aide du théorème de caractérisation des bases par leur représentation matricielle.

(2).(a). On revient à la définition d'une projection et d'une symétrie à partir de $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, où l'on connait la matrice d'une projection ou d'une symétrie dans une base formée par une base de F et d'une base de G.

(b). Les formules de changement de base seront utilisées ici pour revenir à la base canonique ;

Manipuler les propriétés caractéristiques

Exercice| [4581] | 4| Projecteurs et symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel. On suppose que p est un projecteur de E, s une symétrie vectorielle de E et $\overrightarrow{b} \in E$ est un vecteur donné.

(1). Résoudre l'équation $(\star_1)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_1) : \overrightarrow{x} + p\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

(2). Résoudre l'équation $(\star_2)$ d'inconnue le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$: $(\star_2) : \overrightarrow{x} + 2s\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{b}$.

Pistes de réflexion

(1). On se souviendra de la propriété caractéristique des projecteurs...et on fera un raisonnement soit par analyse-synthèse, soit par implication ce qui demandera dans les deux cas de vérifier les solutions obtenues.

(2). On se souviendra de la propriété caractéristique des symétries et on fera un raisonnement soit par analyse-synthèse, soit par implication ce qui demandera dans les deux cas de vérifier les solutions obtenues.

Exercice| [3926] | 5| Composées de projecteurs

Soit E un espace vectoriel et $(p,q) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.
On suppose que p et $p \circ q$ sont des projecteurs.
Montrer alors que $p \circ q \circ p$ est un projecteur de E.

Pistes de réflexion

- On reviendra à la caractſisation des projecteurs, en essayer de montrer que $(p \circ q \circ p)(p \circ q \circ p) = p \circ q \circ p$.