Sous-espaces supplémentaires

Exercice| [5122] | 1| Caractère supplémentaire de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y+z-t=0\right\} \text{ et G} = \text{Vect}\ ((1,-1,1-,1))$$

(1). Déterminer une base ainsi que la dimension de F.

(2). Montrer que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

(3). En déduire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

Pistes de réflexion

(1). On utilisera l'équation caractérisant les élémments de F en l'écrivant sous forme d'un système linéaire pour extraire une famille génératrice de F dont il faudra s'assurer de la liberté.

(2). On considère un vecteur quelconque de $F \cap G$, et on montre qu'en mettant ensemble la caractérisation des éléments de F et celle de G, qu'il ne peut s'agir que du vecteur nul.

(3). On utilisera la caractérisation des sous-espaces supplémentaires faisant intervenir la dimension de ces deux derniers.

Exercice| [5123] | 2| Étude du caractère supplémentaires deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \text{Vect}\ ((f_1, f_2)) \text{ et } G = \text{Vect}\ ((g_1, g_2))$$

où $f_1 = (1,1,0,-1)$, $f_2 = (1,-1,1,2)$, $g_1 = (2,0,1,1)$ et $g_2 = (0,2,1,3)$

(1). Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ est une famille liée.

(2). Déduire de ce qui précède que la somme $F+G$ n'est pas directe.

Pistes de réflexion

(1). On pourra par exemple étudier le rang de la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour conclure quant au caractère lié de la famille.

(2). Le caractère lié de la famille $\mathcal{F}$ assure que le vecteur nul ne se décomposera pas de manière unique sur $F+G$, et donc que la somme n'est pas directe.

Exercice| [5124] | 3| Étude du caractére supplémentaire de $\mathbb{R}^4$

On considère les deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\right\} \text{ et } G = \text{Vect}\ ((1,-1,1,-1), (1,1,-3,3)\,(1,0,-1,1))$$

(1). Déterminer une base et la dimension de F.

(2). Déterminer une base et la dimension de G.

(3). F et G sont-ils supplémentaires ?

Pistes de réflexion

(1). On utilisera l'équation caractérisant les élémments de F en l'écrivant sous forme d'un système linéaire pour extraire une famille génératrice de F dont il faudra s'assurer de la liberté.

(2). On s'assurera du caractère libre de la famille génératrice de G, en extrayant si c'est nécessaire une sous-famille libre de cette dernière pour avoir une base de G et donc sa dimension.

(3). On utilisera la caractérisation des sous-espaces supplémentaires faisant intervenir la dimension de ces deux derniers.

Exercice| [5125] | 4| Étude de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } x-y=0\right\}$$

(1). Montrer que F est de dimension 2.

(2). Démontrer que $F \cap \text{Vect}\ (g_1, g_2) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ où $g_1 = (1,-1,0)$ et $g_2 = (0,0,1)$.

(3). Qu'en conclure pour F et $\text{Vect}\ (g_1, g_2)$?

Pistes de réflexion

(1). On commencera par chercher une famille génératrice de F puis on s'assurera de son caractère libre.

(2). On considère un vecteur quelconque de $F \cap \text{Vect}\ (g_1, g_2)$, et on montre qu'en mettant ensemble la caractérisation des éléments de F et celle de G, qu'il ne peut s'agir que du vecteur nul.

(3). On utilisera la caractérisation des sous-espaces supplémentaires faisant intervenir la dimension de ces deux derniers.

Sommes directes et supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ par concaténation de bases

Exercice| [5121] | 5| Concaténation de bases

Dans chaque cas, analyser les informations données sur F et G, et conclure quant au fait que l'on a ou non $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

$F = \text{Vect}\ (f_1, f_2)$ | $G = \text{Vect}\ (g_1)$

Matrice A de la famille (f_1, f_2, g_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

☐ OUI

☐ NON

$F = \mathrm{Vect}\,(f_1)$ | $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2)$

Matrice A de la famille (f_1, g_1, g_2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

☐ OUI

☐ NON

$F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ | $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2)$

Matrice A de la famille (f_1, f_2, g_1, g_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

☐ OUI

☐ NON

$F = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)$ | $G = \mathrm{Vect}\,(g_1)$

Matrice A de la famille (f_1, f_2, f_3, g_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

☐ OUI

☐ NON

Pistes de réflexion

- On se souviendra que si $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ alors $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont supplémentaires.
- Il s'agit donc d'étudier le caractère base de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ pour conclure quant au caractère supplémentaire des deux sous-espaces, à l'aide de la caractérisation des bases par l'inversibilité de la représentation matricielle de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Lorsque cette dernière famille n'est pas une base, il s'agit d'une famille liée, ce qui entraîne qu'il ne pourra y avoir décomposition unique du vecteur nul sur cette famille et donc dans $F + G$, et donc on perd le caractère somme directe.

Sommes directes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}_n[x]$

Exercice| [5126] | 6| Somme directe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ deux sous-espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Sont-ils en somme directe ?

Pistes de réflexion

- On peut s'intéresser à $F \cap G$ et essayer de montrer que $F \cap G = \{(0)\}$ et conclure selon le cas.
- On peut aussi essayer de s'intéresser au caractère libre de la famille formée par ces quatre matrices.

Exercice| [3891] | 7| Somme de sous-espaces

On considère les deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}_3[x]$ donnés par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(0) = P(1)\} \text{ et } G = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P'(0) = P'(1)\}$$

(1). Montrer que F et G sont tous les deux de dimension 2.

(2). Montrer que F et G ne peuvent pas être supplémentaires.

Pistes de réflexion

(1). On cherchera pour F et G une famille génératrice, dont il faudra s'assurer de sa liberté.

(2). On essaiera d'exhiber un vecteur de $F \cap G$ qui n'est pas le polynôme nul.