Sous-espaces supplémentaires

EX. 1 | Réf. 5122

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z - t = 0\right\} \text{ et } \mathsf{G} = \text{Vect } ((1, -1, 1-, 1))$$

1. Déterminer une base ainsi que la dimension de F.
2. Montrer que $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5122

1. On utilisera l'équation caractérisant les élémments de F en l'écrivant sous forme d'un système linéaire pour extraire une famille génératrice de F dont il faudra s'assurer de la liberté.
2. On considère un vecteur quelconque de $F \cap G$, et on montre qu'en mettant ensemble la caractérisation des éléments de F et celle de G, qu'il ne peut s'agir que du vecteur nul.
3. On utilisera la caractérisation des sous-espaces supplémentaires faisant intervenir la dimension de ces deux derniers.

EX. 2 | Réf. 5123

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \text{Vect } ((f_1, f_2)) \text{ et } G = \text{Vect } ((g_1, g_2))$$

où $f_1 = (1, 1, 0, -1)$, $f_2 = (1, -1, 1, 2)$, $g_1 = (2, 0, 1, 1)$ et $g_2 = (0, 2, 1, 3)$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ est une famille liée.
2. Déduire de ce qui précède que la somme $F + G$ n'est pas directe.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5123

1. On pourra par exemple étudier le rang de la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ pour conclure quant au caractère lié de la famille.
2. Le caractère lié de la famille $\mathcal{F}$ assure que le vecteur nul ne se décomposera pas de manière unique sur $F + G$, et donc que la somme n'est pas directe.

EX. 3 | Réf. 5124

On considère les deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\right\} \text{ et } G = \text{Vect } ((1, -1, 1, -1), (1, 1, -3, 3)\,(1, 0, -1, 1))$$

1. Déterminer une base et la dimension de F.
2. Déterminer une base et la dimension de G.
3. F et G sont-ils supplémentaires ?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5124

1. On utilisera l'équation caractérisant les élémments de F en l'écrivant sous forme d'un système linéaire pour extraire une famille génératrice de F dont il faudra s'assurer de la liberté.
2. On s'assurera du caractère libre de la famille génératrice de G, en extrayant si c'est nécessaire une sous-famille libre de cette dernière pour avoir une base de G et donc sa dimension.
3. On utilisera la caractérisation des sous-espaces supplémentaires faisant intervenir la dimension de ces deux derniers.

EX. 4 | Réf. 5125

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\right\}$$

1. Montrer que F est de dimension 2.
2. Démontrer que $F \cap \text{Vect}\ (g_1, g_2) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ où $g_1 = (1, -1, 0)$ et $g_2 = (0, 0, 1)$.
3. Qu'en conclure pour F et $\text{Vect}\ (g_1, g_2)$?

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5125

1. On commencera par chercher une famille génératrice de F puis on s'assurera de son caractère libre.
2. On considère un vecteur quelconque de $F \cap \text{Vect}\ (g_1, g_2)$, et on montre qu'en mettant ensemble la caractérisation des éléments de F et celle de G, qu'il ne peut s'agir que du vecteur nul.
3. On utilisera la caractérisation des sous-espaces supplémentaires faisant intervenir la dimension de ces deux derniers.

Sommes directes et supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ par concaténation de bases

EX. 5 | Réf. 5121

Dans chaque cas, analyser les informations données sur F et G, et conclure quant au fait que l'on a ou non $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

$F = \text{Vect}\ (f_1, f_2)$ | $G = \text{Vect}\ (g_1)$

Matrice A de la famille (f_1, f_2, g_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$: ☐ OUI ☐ NON

$F = \text{Vect}\ (f_1)$ | $G = \text{Vect}\ (g_1, g_2)$

Matrice A de la famille (f_1, g_1, g_2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$: ☐ OUI ☐ NON

$F = \text{Vect}\ (f_1, f_2)$ | $G = \text{Vect}\ (g_1, g_2)$

Matrice A de la famille (f_1, f_2, g_1, g_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$: ☐ OUI ☐ NON

$F = \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)$	$G = \text{Vect}\,(g_1)$

Matrice A de la famille (f_1, f_2, f_3, g_1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

☐ OUI

☐ NON

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5121

- On se souviendra que si $\mathbb{R}^n = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ alors $\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ et $\text{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont supplémentaires.
- Il s'agit donc d'étudier le caractère base de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ pour conclure quant au caractère supplémentaire des deux sous-espaces, à l'aide de la caractérisation des bases par l'inversibilité de la représentation matricielle de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Lorsque cette dernière famille n'est pas une base, il s'agit d'une famille liée, ce qui entraîne qu'il ne pourra y avoir décomposition unique du vecteur nul sur cette famille et donc dans $F + G$, et donc on perd le caractère somme directe.

Sommes directes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}_n[x]$

EX. 6 | Réf. 5126

On considère $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ deux sous-espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Sont-ils en somme directe ?

EX. 6 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5126

- On peut s'intéresser à $F \cap G$ et essayer de montrer que $F \cap G = \{(0)\}$ et conclure selon le cas.
- On peut aussi essayer de s'intéresser au caractère libre de la famille formée par ces quatre matrices.

EX. 7 | Réf. 3891

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1)\}$. Déterminer une base et la dimension de F.
2. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(0) = P'(1)\}$. Déterminer une base et la dimension de G.
3. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
4. A-t-on $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$?