Convergence par utilisation de la définition

Exercice| [3982] | 1| Calcul par primitivation directe

On considère l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^{x}+1)(1+\mathrm{e}^{-x})}\,\mathrm{d}x$.

(1). Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{x}+1)(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$.

(2). Donner une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{x}+1)(1+\mathrm{e}^{-x})}$ sur $\mathbb{R}$.

(3). Montrer que l'intégrale $\mathcal{I}$ est convergente, puis calculer sa valeur.

Pistes de réflexion

(1). On transformera l'expression de la fonction à intégrer de sorte à pouvoir la primitiver directement, en multipliant au numérateur et au dénominateur par e^{x}.

(2). On reconnaîtra une forme classique de dérivée usuelle.

(3). On commencera par identifier les bornes impropres de $\mathcal{I}$, puis il restera alors à étudier la convergence de l'intégrale à l'aide d'un calcul de limite portant sur la primitive précdemment trouvée.

Exercice| [5099] | 2| Convergence par primitivation directe

On considère l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{1} t^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

(1). À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \left]0;1\right],\ \int_a^b t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(b^3\ln(a) - a^3\ln(a)\right) + \frac{1}{3}\left(a^3 - b^3\right)$$

(2). Justifier que l'intégrale $\mathcal{I}$ est convergente, puis en calculer sa valeur.

Pistes de réflexion

(1). Pour les deux intégrations par parties successives, on regardera quelle fonction on est en mesure de primitiver...

(2). On commencera par identifier les bornes impropres de l'intégrale, puis on procèdera à un calcul de limite reposant sur la primitive précédemment trouvée pour établir la convergence puis trouver la valeur de cette intégrale.

Exercice| [5103] | 3| Convergence et calcul d'intégrale impropre

(1). Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1} = \ln(2) + \ln(\mathrm{e}^{a}) - \ln(\mathrm{e}^{a}+1)$.

(2). Étudier alors la convergence et la valeur de l'ingérale $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}\,\mathrm{d}t$.

(3). Faire de même pour $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\mathrm{e}^{t}+1}\,\mathrm{d}t$.

Pistes de réflexion

(1). On pensera à multiplier au numérateur et au dénominateur par e^{-t} pour obtenir ensuite une forme de dérivée usuelle.

(2). On identifiera les bornes impropres de $\mathcal{I}_1$, puis on procédera à un calcul de limite dans l'expression précédente pour obtenir convergence et valeur.

(3). On procède comme à la question précédente, sans garantie de retrouver des résultats similaires...

Exercice| [1492] | 4| Intégrales impropres

On considère l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2^t}\,\mathrm{d}t$.

(1). À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ \int_0^{x} t2^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)}\left(\int_0^{x} 2^t\,\mathrm{d}t - x2^x\right)$$

(2). Déduire de ce qui précède que $\mathcal{I}$ est une intégrale convergente, et en donner sa valeur.

Pistes de réflexion

(1). On reviendra à l'écriture exponentielle de $t \longmapsto 2^t$, pour ensuite dans l'intégration par parties faire baisser le degré de la partie polynômiale, pour obtenir la relation proposée.

(2). On commencera par identifier les bornes impropres de $\mathcal{I}$, puis on utilisera le résultat de la question précdente pour obtenir convergence et valeur de $\mathcal{I}$ par passage à la limite.

Exercice| [5107] | 5| Convergence et calcul par changement de variables

On désigne par $\mathcal{I}$ l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$.

(1). À l'aide du changement de variables $u = \sqrt{t}$, montrer que :

$$\forall x \in [1;+\infty[,\ \int_1^{x} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$

(2). Montrer que $\mathcal{I}$ est convergente et donner sa valeur.

Pistes de réflexion

(1). On effectue le changement de variable proposée, en gérant correctement les bornes et l'élément différentiel.

(2). On utilisera la question précédente pour établir la convergence de $\mathcal{I}$ en passant à la limite sur x dans l'égalité précédente, et on obtiendra par la suite la valeur.

Convergence par utilisation d'un théorème

Exercice| [4303] | 6| Intégrales généralisées

On considère l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t - 2}\,\mathrm{d}t$.

(1). Quelle est la nature de l'intégrale $\mathcal{I}$?

(2). Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]2; +\infty[, \quad \dfrac{1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$.

(3). En déduire la valeur de $\mathcal{I}$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier les bornes impropres de I, et on pourra ensuite utiliser le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives.

(2). On procèdera à une réduction au même dénominateur pour identifier les deux coefficients a et b.

(3). On utilisera la relation de Chasles à partir de la décomposition obtenue à la question précédente, en revenant à la définition de la valeur d'une intégrale impropre.

Exercice| [5104] | 7| Changement de variables dans une intégrale impropre

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de calculer la valeur de l'intégrale impropre $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t + 1}\,\mathrm{d}t$.

(1). Montrer que $\mathcal{I}$ est convergente.

(2). À l'aide du changement de variable $u = t - \dfrac{1}{2}$, montrer que :

$$\forall a \in [0; +\infty[, \int_0^a \frac{1}{t^2 - t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{a-\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{3}{4} + u^2}\,\mathrm{d}u$$

(3). Déterminer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

(4). Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathcal{I}$.

Pistes de réflexion

(1). On identifiera les bornes impropres, puis on utilisera le théorème d'équivalence pour établir la convergence.

(2). On procède au changement de variable proposé en remarquant que $u^2 = t^2 - t + \dfrac{1}{4}$.

(3). Il s'agit d'un simple calcul de dérivée.

(4). La question précédente nous donne une primitive de la fonction à intégrer obtenue à l'issue du changement de variable proposé.

Un pas vers les densités de probabilité

Exercice| [5100] | 8| Autour de la loi exponentielle

Dans tout ce qui suit, λ désigne un réel strictement positif.
On considère les deux intégrales impropres $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

(1). Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). Justifier que les deux intégrales $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ sont convergentes.

(3). À l'aide d'une inégration par parties, montrer que $\mathcal{I}_1 = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

(4). Montrer que : $\quad \mathcal{I}_2 = \dfrac{2}{\lambda}\mathcal{I}_1$.
puis donner la valeur de $\mathcal{I}_2$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit d'une intégrale de référence à une constante multiplicative près.

(2). On utilisera un thèoreme de comparaison pour établir la convergence des deux intégrales.

(3). On reviendra à une intégration sur un intervalle de la forme $[0; x]$ avec $x \geq 0$, en faisant baisser le degré de la partie polynômiale de l'expression.

(4). On procèdera encore à une intégration par parties, en abaissant encore le degré de la partie polynômiale de sorte à faire apparaître $\mathcal{I}_1$?

Exercice| [5101] | 9| Autour de la loi de Cauchy

On considère l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(1). Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, puis en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et en donner sa valeur.

(2). Montrer que : $\quad \forall a \in \mathbb{R}^+, \displaystyle\int_{-a}^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(3). Déduire de la question précédente que $\mathcal{I}$ est convergente, puis en donner sa valeur.

Pistes de réflexion

(1). On reconnaîtra la dérivée de la fonction $t \longmapsto \arctan(t)$. Pour le reste, il suffira d'identifier les bornes impropres de l'intégrale proposée et de procéder à un calcul de limites sur la primitive trouvée pour obtennir convergence et valeur.

(2). Soit on utilise un changement de variables, soit on remarque que la fonction à intégrer est paire. . .

(3). La question précédente simplfie les discussions pour la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ puisque que l'on peut réinvestir ce que l'on a faire précdemment, et en plus donne un lien entre les deux sous-intégrales à étudier pour établir la convergence de $\mathcal{I}$.

Exercice| [5102] | 10| Moment de la loi de Cauchy

On considère l'intégrale impropre $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(1). Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$.

(2). Déduire de ce qui précède que $\mathcal{I}_1$ est divergente.

(3). Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un théorème de convergence pour les intégrales impropres.

(4). Que dire alors que $\mathcal{I}_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

Pistes de réflexion

(1). à un facteur multiplicatif près, on remarquera une forme de dérivée usuelle.

(2). Après avoir identifié les bornes impropres, on procèdera à un calcul de limites sur la primitive obtenue précédemment pour obtenir la divergence de l'intégrale $\mathcal{I}_1$.

(3). Le théorème d'équivalence semble être le plus pertinant ici.

(4). Une intégrale impropre en ses deux bornes n'a de sens que si les deux sous-intégrales qui la définissent sont toutes les deux convergentes.

Grands classiques des intégrales impropres

Exercice| [5105] | 11| Autour de la fonction Γ | Calcul de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$

On se propose dans cet exercice d'étudier la nature de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$ et d'en calculer la valeur.

(1). Démontrer que l'intégrale I_n est convergente.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^x t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}$$

(3). En déduire une relation entre I_n et I_{n+1}

(4). Rappeler la valeur de I_0, puis donner une expression de I_n en fonction de n.

Pistes de réflexion

(1). On pourra mobiliser un théorème de convergence en utilisant par exemple un résultat sur les croissances comparées.

(2). On réalisera cette intégration par parties en diminuant le degré de la partie polynômiale.

(3). Les deux intégrales I_{n+1} et I_n étant convergente, on peut passer à la limite sur x dans la relation précédente et obtenir une relation entre I_n et I_{n+1}.

(4). I_0 est une intégrale de référence et pour l'expression de I_n, un raisonnement de proche en proche laisse conjecturer une expression à l'aide d'une factorielle.

Exercice| [5106] | 12| Suite d'intégrales impropres | ECRICOME 2016 Filière ECT

On considère la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} I_0 &= \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n &= \displaystyle\int_1^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

(1). Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2). À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \,]1;+\infty[,\ \int_1^M t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^{n+1}}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\int_1^x t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(3). Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

(4). Établir alors la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$.

(5). Montrer alors que $I_5 = \dfrac{326}{\mathrm{e}}$.

Pistes de réflexion

(1). On identifie les bornes impropres de I_0, puis on obtient la convergence et la valeur par primitivation directe de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$.

(2). On procèdera à une intégration par parties en abaissant le degré de la partie polynômiale de la fonction à intégrer.

(3). On explicitera proprement la proposition de récurrence à démontrer, puis on utilisera la question précédente pour établir l'hérédité et achever la récurrence.

(4). La relation proposée découle de la partie « hérédité » du raisonnement par récurrence précédent.

(5). On calcule les valeurs de I_n de proche en proche à partie de la relation proposée jusqu'au rang $n = 5$.