Recherche d'équivalents

Exercice| [5029] | 1| Développements limités et équivalents

On se propose dans cet exercice de déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions f, g et h données par :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}(x) - \cos(x) - \sin(x), \quad g : x \longmapsto \ln(1+x) - x, \quad h : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+1} - (1+x)^{\mathrm{e}} - (\mathrm{e}-1)$$

(1). Former le $DL_2(0)$ de f et de g

(2). En déduire un équivalent simple de f et g en 0.

(3). À l'aide de développements limités montrer que : $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \left(\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\right) x^2$

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de mobiliser les $DL_2(0)$ des fonctions constituant f et g, pour ensuite les additionner.

(2). On remarquera que les $DL_2(0)$ ne contiennent qu'un seul terme...

(3). On aura remarqué dans les questions précédentes que les opérations sur les développements limités font « disparaître » des termes, et donc qu'il faut que les développements limités soient d'un ordre suffisant pour qu'il reste des termes...

Calculs de limites

Exercice| [0764] | 2| Limites

On se propose dans cet exercice de déterminer les limites en 0 des fonctions f, g et h suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2}, \quad g : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}, \quad h : x \longmapsto \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{\tan(x) - x}$$

(1). Former le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+2x}$.

(2). En déduire que $\sqrt{1+2x} - (1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^2$ puis donner la limite que f en 0.

(3). Former le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ et de $x \longmapsto \sin(x)$.

(4). En déduire que $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1$ et la limite de g en 0.

(5). Justifier que $x\cos(x) - \sin(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et que $\tan(x) - x = \dfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

(6). En déduire la limite de h en 0.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours, et on compose pour obtenir le $DL_2(0)$ souhaité.

(2). On sait que l'on peut obtenir un équivalent à l'aide d'un développement limité en prenant le premier terme non nul.

(3). On récite son cours...

(4). On effectue un $DL_2(0)$ du dénominateur de g. Il restera alors à reporter les différents $DL_2(0)$ obtenus dans l'expression de g pour obtenir à la fois un équivalent et la limite de g.

(5). On utilise les développements limités usuels.

(6). Il restera alors à reporter les différents $DL_2(0)$ obtenus dans l'expression de h pour obtenir à la fois un équivalent et la limite de h.

Comportement local ou asymptotique d'une fonction

Exercice| [5011] | 3| Exploiter un développement limité Exploiter un développement asymptotique

(1). On admet que pour $f : x \longmapsto 2x(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x$, on a établi que :

$$f(x) = -1 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Que peut-on en déduire pour f ?

(2). On admet que pour $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$, on a établi que :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \underset{x\to}{o}(0)\, x^4,$$

Que peut-on en déduire pour f ?

(3). On admet que pour $f : \left| \begin{array}{ccl}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$ on a établi que :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Que peut-on en déduire pour f ?

(4). On admet que pour $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}$, on a établi que :

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Que peut-on en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). Ce développement limité donnera l'équation réduite de la tangente en 0, ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

(2). Ce développement limité donnera l'équation réduite de la tangente en 0, ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

(3). Ce développement limité donnera l'équation réduite de la tangente en 0, ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette tangente. Mais on obtiendra surtout une information sur le caractère dérivable de f en 0 !

(4). Ce développement limité ou asymptotique donnera l'équation réduite d'une asymptote oblique à la courbe représntation de f, ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Exercice| [1511] | 4| Développements limités

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

(1). Justifier que : $\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

En déduire que : $f(x) = x + 2 \underset{x\to+\infty}{o}(1)$.

(2). Déterminer alors la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

(3). Former le développement asymptotique à l'ordre 2 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire que l'on a :

$$f(x) = x + 2 + \frac{5}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(4). Déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation, puis préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ au voisinage de $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit simplement d'écrire un $DL_1(0)$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ et de remarquer que $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On procède alors de même avec la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et on obtiendra alors le développement asymptotique de f par produit de ces deux développments asymptotiques. La limite de f est alors immédiate ;

(2). On reprend les calculs précédents, mais en allant à un ordre supérieur dans les développements.

(3). Le développement asymptotique précédent par d'obtenir l'équation réduite d'une asymptote oblique, et la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Étude locale d'une fonction | Continuité | Dérivabilité

Exercice| [1510] | 5| Développements limités

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

(1). Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$, et en déduire que :

$$g(x) = \frac{x}{1 + \dfrac{x^2}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^2)}$$

(2). Déduire de la question précédente que : $g(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)$.

(3). En déduire que g est continue et dérivable en 0.

(4). Déterminer la position relative au voisinage de 0 du graphe $\mathcal{C}_g$ de g et de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours dans un premier temps, puis ensuite, on injecte le développement obtenu dans l'expression de f

(2). Il reste à effectuer une composition avec le développement limité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ pour obtenir celui de g.

(3). L'existence d'un $DL_1(0)$ assure la dérivabilité, et comme ici on a déjà un $DL_3(0)$, c'est terminé pour ce point. Pour la continuité, il suffit d'utiliser ce $DL_3(0)$ pour s'assurer que $g(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} g(0)$.

(4). La position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à sa tangente en 0 s'obtient à l'aide du signe du premier monôme non nul de degré supérieur ou égal à 2 dans un $DL_n(0)$ à un ordre suffisant.

Exercice| [1512] | 6| Développements limités

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\setminus \{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

(1). Déterminer la limite en 0 de f. Qu'en conclure pour f ?

(2). (a). Montrer que le $DL_2(0)$ de f est : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$

(b). En déduire que f est dérivable en 0, puis que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Pistes de réflexion

(1). Il est fort possible que la limite trouvée soit une limite finie, et par suite que f soit prolongeable par continuité en 0.

(2). (a). On récite son cours...

(b). La difficulté est de gérer le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(1-x)}$ qu'il faudra réaliser à un ordre suffisant pour que la simplification par x nécessaire permette de conserver un ordre 2 dans le développement limité.

On sait que f est dérivable en 0 si, et seulement si, f admet un $DL_1(0)$, ce qui sera le cas puisqu'on aura au préalable obtenu un $DL_2(0)$. Le nombre dérivé de f en 0 est alors le coefficient du terme de degré 1 du $DL_2(0)$ obtenu.