Utilisation directe des développements limités usuels

Exercice| [5025] | 1

- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-2x}$
- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$
- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1-x)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+2x)$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1-x}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+\dfrac{x}{2}}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1-2x}$
- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \sin(x)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)$
- $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \sin(2x)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
- $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^3}$
- $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \sin\left(x^2\right)$

Pistes de réflexion

On mobilise ses formules de développements limités usuels, puis on obtient le développement limité par composition en tenant compte des ordres.

Obtention de développements limités par opérations

Exercice| [5028] | 2| Développements limités

On se propose dans cet exercice de former le $DL_3(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1-x)\cos(2x)$.

(1). Donner le $DL_3(0)$ de $t \longmapsto \cos(t)$, et en déduire celui de $x \longmapsto \cos(2x)$.

(2). Former alors de $DL_3(0)$ de f.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours, puis on compose pour obtenir le $DL_3(0)$ voulu.

(2). On obtient le $DL_3(0)$ de f par produit de deux $DL_3(0)$, en ne gardant que les termes de degré inférieur à 3 lors de la multiplication des parties régulières.

Exercice| [5026] | 3| Développements limités

On se propose dans cet exercice de former le $DL_4(0)$ de $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x+1}$.

(1). Donner le $DL_3(0)$ de $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$, puis former le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.

(2). Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$.

(3). Donner alors le $DL_4(0)$ de f.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours, puis on effectue une composition pour obtenir le développement limité demandé.

(2). On remarque que la multiplication par x nous fait gagner un ordre.

(3). Puisque $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}$, on obtient le $DL_4(0)$ en multipliant le $DL_4(0)$ précédent par e.

Exercice| [5027] | 4| Développements limités

On se propose dans cet exercice de former le $DL_4(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

(1). Former le $DL_6(0)$ de $x \longmapsto 1-\cos(x)$.

(2). En déduire le $DL_4(0)$ de f.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours pour le $DL_6(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)$ dont on prend l'opposé pour obtenir le $DL_6(0)$ recherché.

(2). On divise le $DL_6(0)$ précédent en faisant attention aux ordres.

Exercice| [1507] | 5| Développements limités

On se propose dans cet exercice de déterminer le $DL_4(0)$ de $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x}\ln(1+x)$.

(1). Rappeler le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

(2). Former le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x} \times \ln(1+x)$

(3). En déduire le $DL_4(0)$ de f.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours...

(2). On effectue simplement le produit des deux $DL_3(0)$ précédents, en ne conservant que les termes de degré inférieur à 3.

(3). On remarquera que la multiplication par x permet de gagner un ordre dans les $DL_n(0)$ mis en jeu pour $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

Exercice| [1506] | 6| Développements limités

On se propose dans cet exercice d'obtenir le $DL_2(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x+\mathrm{e}^{x}}$.

(1). Former le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

(2). Justifier que $x+\mathrm{e}^{x} = 1+2x+\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

(3). Rappeler le $DL_2(0)$ de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ et en déduire que :

$$\frac{1}{x+\mathrm{e}^{x}} = 1-2x+\frac{7}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

(4). Déduire de ce qui précède le $DL_2(0)$ de f.

Pistes de réflexion

(1). On récite son cours...

(2). On écrit le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$, et on ajoute x.

(3). On récite son cours, puis on utilise la composition du $DL_2(0)$ de $x \longmapsto x+\mathrm{e}^{x}$ avec celui de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$.

(4). Il reste à effectuer un produit des $DL_2(0)$ obtenues précédemment pour obtenir le $DL_2(0)$ voulu.