Autour de la factorisation de polynômes

Exercice| [0413] | 1| Factorisation de polynômes

On considère le polynôme $P(x) = x^5 + 6x^4 + 10x^3 - 20x^2 - 51x - 26$ de $\mathbb{R}[x]$.

(1). Vérifier que -1 et 2 sont racines de P.

(2). Quels en sont leur ordre de multiplicité ?

(3). Terminer alors la factorisation de P dans $\mathbb{R}[x]$.

Pistes de réflexion

(1). On se contentera d'évaluer P en 1 et -1.

(2). On utilisera la caractérisation de l'ordre de multiplicité faisant intervenir les dérivées de P.

(3). On met en forme la factorisation de P à l'aide des racines trouvées, et on identifie éventuellement la partie résiduelle de la factorisation.

Exercice| [3348] | 2| Factorisation de polynômes

On considère le polynôme $P(x) = x^6 - x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 20x + 8$ de $\mathbb{R}[x]$

(1). Trouver trois racines réelles « évidentes » pour le polynôme .

(2). Déterminer l'ordre de multiplicité de chacune d'entre elles.

(3). Factoriser alors P dans $\mathbb{R}[x]$.

Pistes de réflexion

(1). On cherchera prioritairement les racines évidentes de P dans $\{0, \pm 1, \pm 2\}$.

(2). On utilisera la caractérisation de l'ordre de multiplicité faisant intervenir les dérivées de P.

(3). On met en forme la factorisation de P à l'aide des racines trouvées, et on identifie éventuellement la partie résiduelle de la factorisation.

Exercice| [2197] | 3| Factorisation de polynômes

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par :

$$P = 4x^7 - 16x^6 + 9x^5 + 15x^4 + 15x^3 - 18x^2 - 28x - 8$$

(1). Soit Q le polynôme donné par $Q = x^2 + x + 1$.

- **(a).** Effectuer la division euclidienne de P par Q.
- **(b).** Qu'en conclure ?

(2). Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.

(3). Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[x]$.

Pistes de réflexion

(1).
- **(a).** Effectuer ce qui est demander... sans se tromper !
- **(b).** Comment interprète-t-on le reste d'une division euclidienne ?

(2). Utiliser peut-être le théorème liant dérivée et ordre de multiplicité d'une racine pour aller plus vite.

(3). Aller jusqu'au bout de la factorisation en n'oubliant pas de factoriser si possible les éventuels polynômes de degré 2 qui apparaissent.

Applications de la factorisation

Exercice| [2363] | 4| Factorisation de polynômes

Soit P la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -10x^3 - 23x^2 + 65x - 12$.

(1). Vérifier que -4 est racine de P.

(2). Justifier alors l'existence de trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+4)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

puis les déterminer.

(3). Déduire des questions précédentes :
- **(a).** La résolution de l'équation $P(x) = 0$;
- **(b).** Une factorisation de $P(x)$ sous forme d'un produit de 3 fonctions affines ;
- **(c).** La résolution de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Pistes de réflexion

(1). Calculer $P(-4)$.

(2). Procéder à une identification pour déterminer les différents coefficients a, b et c.

(3).
- **(a).** C'est une équation produit...
- **(b).** Il reste une partie à factoriser...
- **(c).** C'est une étude de signe à faire.

Exercice| [2287] | 5| Signe d'un quotient

On se propose dans cet exercice de déterminer le signe du quotient :

$$Q(x) = \frac{-6x^3 + 19x^2 - 19x + 6}{3x^2 - 2x - 8}$$

(1). Pour tout réel x, on pose $R(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Résoudre l'équation $R(x) = 0$.

(2). Pour tout réel x, on pose $P(x) = -6x^3 + 19x^2 - 19x + 6$.
- **(a).** Montrer que 1 est racine de P.
- **(b).** Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$
- **(c).** Factoriser alors P sous forme d'un produit de 3 fonctions affines.
- **(d).** Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

(3). Utilisez les questions précédentes pour construire le tableau de signe de $Q(x)$.

Pistes de réflexion

(1). Résoudre une équation de degré 2.

(2). (a). Vérifier qu'un nombre est racine d'un polynôme.

(b). Factoriser un polynôme de degré 3.

(c). Terminer la factorisation d'un polynôme de degré 3

(d). Étudier le signe d'un polynôme de degré 3.

(3). Étudier le signe d'un quotient.

Histoire de racines

Exercice| [3349] | 6| Somme et produit de racines

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 44x + 80$.
On sait qu'une des trois racines réelles de P est le double d'une des deux autres. Retrouver les trois racines de P.