Un peu de technique avec les variables aléatoires discrètes

Exercice| [4394] | 1| Théorème de transfert et calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2(X+1)$ admet une espérance et la calculer.

Pistes de réflexion

- Il s'agit de montrer que la série numérique $\sum k^2(k+1)\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente pour assurer l'existence de $\mathbb{E}(Z)$.
- On pourra utiliser le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières pour en calculer la somme, en remarquant que $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$ et $k^2 = k(k-1) + k$

Exercice| [1271] | 2| Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit α un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.

Pistes de réflexion

- Il s'agit de mobiliser ici le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

Exercice| [1165] | 3| Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire telle $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabiltié vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = a\frac{k^2+1}{k!}$$

où a est un réel fixé.

(1). Calculer a.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de déterminer la valeur du réel a pour que la série numérique $\sum \mathbb{P}([X=k])$ soit à termes positifs, convergente et de somme 1.

(2). Il va donc falloir montrer que les deux séries numériques $\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X=x])$ et $\sum_{x \in (\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}([X=x])$ sont absolument convergentes et en calculer leur somme, pour ensuite utiliser la formule de Huygens pour obtenir la variance de X.

Situations d'études

Exercice| [4356] | 4| Étude d'un système à deux états | G2E 2018 Filière BCPST

Un feu bicolore, lorsqu'il est « rouge » à l'instant n, passe au « vert » à l'instant $n+1$ avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ et lorsqu'il est « vert » à l'instant n, il passe au « rouge » à l'instant $n+1$ avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.
On suppose que cette expérience aléatoire peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \mathbb{P}(R_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ où R_n (respectivement V_n) est l'événement : « le feu est rouge (respectivement vert) à l'instant n ».

(1). Établir les relations de récurrence liant r_{n+1} et v_{n+1} à r_n et v_n.
Déterminer alors une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(2). Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

(3). On admet que $B = \frac{1}{7}\mathrm{I}_2 + \frac{6}{7}A$ et $C = \frac{6}{7}\mathrm{I}_2 - \frac{6}{7}A$ sont deux matrices telles que

$$\begin{cases} B + C = \mathrm{I}_2 \\ B - \frac{1}{6}C = A \end{cases}$$

où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Vérifier que $B^2 = B$, $C^2 = C$ et $BC = CB$.

(4). En déduire A^n, puis les expressions de r_n et v_n en fonction de n.

(5). Quelles sont les limites éventuelles de r_n et v_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Pistes de réflexion

(1). On utilisera le système complet d'événements $\{R_n, V_n\}$ pour déterminer $\mathbb{P}([R_{n+1}])$ et $\mathbb{P}([V_{n+1}])$.

(2). On remarque que l'on a une formule proche de celle que l'on obtient pour l'expression du terme général d'une suite géométrique. Une récurrence permettra de l'établir.

(3). On résout ce système linéaire dont les inconnues sont les matrices B et C, puis on calcule les produits demandés.

(4). On utilisera le binôme de Newton pour calculer A^n à partir de sa décomposition en fonction de B et C.

(5). On exploite l'expression de A^n pour obtenir les expressions de r_n et v_n en fonction de n.

(6). C'est un calcul de limite qui fait intervenir des suites géométriques.

Exercice| [4366] | 5| Étude du temps d'attente lors d'un lancer de dés

On lance trois dés à six faces numérotées de un à six parfaitement équilibrés, jusqu'à obtenir « trois six », sachant que dès qu'un dé tombe sur un « six », on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un « six ».
On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un « six » sur le premier dé.
On définit sur le même principe X_2 et X_3 pour les deux autres dés.

(1). Quelles sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?

(2). Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Déterminer $\mathbb{P}([X_i \leq k])$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

(3). Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les « trois six ».
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([X \leq k])$ en admettant que les événements $[X_1 \leq k]$, $[X_2 \leq k]$ et $[X_3 \leq k]$ sont indépendants.

(4). En déduire la loi de la variable X.

(5). Déterminer, si elle existe, l'espérance mathématique de X.

Pistes de réflexion

(1). X_1 est clairement le temps d'attente du premier succès dans la répétition de la même épreuve de Bernoulli, ou on peut établir la loi de X_1 en considérant les événements succès de chaque lancer.

(2). Il s'agit de calculer la somme $\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}([X_i = j])$.

(3). On remarquera que $X = \max(X_1, X_2, X_3)$ et que $[X \leq k] = [X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k] \cap [X_3 \leq k]$.

(4). On rappelle le lien $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k-1])$ pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(5). Il s'agit d'établir la convergence absolue d'une série numérique et d'en calculer la somme.

Exercice| [4361] | 6| Étude d'un lancer de deux pièces conditionné par le résultat précédent

Soit $(p_1, p_2) \in]0, 1[^2$. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.
On considère A_1 et A_2 deux pièces de monnaies non équilibrées où la probabilité d'obtenir « Face » avec la pièce A_i est p_i.
On effectue alors une succession de lancers avec ces deux pièces selon le protocole suivant :

- Pour la première partie, on choisit une pièce au hasard, ce choix étant équiprobable. On lance alors la pièce choisie.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on obtient « Face » lors de la n^e partie, on joue la suivante avec la pièce A_1, sinon, on joue la partie suivante avec la pièce A_2.
  On notera alors u_n la probabilité d'obtenir « Face » lors de la n^e partie.

On suppose que cette expérience aléatoire peut-être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(1). Exprimer u_1 et u_2 en fonction de p_1 et p_2.

(2). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

(3). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat de la n^e partie est « Face » et 0 si le résultat est « Pile ».

- **(a).** Déterminer la loi de X_n. En déduire son espérance mathématique.
- **(b).** À quelle condition sur p_1 et p_2 les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont-ils indépendants ?

Pistes de réflexion

(1). On pourra faire intervenir un système complet d'événements portant sur le choix de la première pièce pour exprimer u_1, et un autre faisant intervenir le résultat du premier lancer pour exprimer u_2.

(2). On adoptera une démarche similaire pour exprimer u_n en fonction de p_1 et p_2.

(3).(a). Puisque $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, il s'agit d'une variable aléatoire de Bernoulli dont il suffit d'identifier le paramètre.

(b). Il s'agit de déterminer une condition nécéssaire et suffisante pour avoir $\mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Exercice| [4635] | 7| Succession de tirages

On dispose d'une boîte qui contient deux jetons, un noir et un blanc.
On procède à une succession de n tirages dans cette boîte en le remettant entre chaque tirage après en avoir noté la couleur.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et D_n les événements suivants :

A_n : « on obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »

D_n : « on obtient au plus un jeton noir »

(1). Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(2). Dans le cas où $n = 2$, les deux événements A_n et D_n sont-ils indépendants ?

(3). Même question dans le cas où $n = 3$.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera plutôt à $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$, car l'événement $\overline{A_n}$ est bien plus simple à décrire. Pour D_n, on traduira sous forme d'une union disjointe la notion de « au plus un jeton noir ».

(2). On vérifiera si $\mathbb{P}(A_2 \cap D_2) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(D_2)$.

(3). On vérifiera si $\mathbb{P}(A_3 \cap D_3) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(D_3)$.

Exercice| [4357] | 8| Modélisation d'un service d'urgence

Le nombre N de blessés arrivant aux urgences médicales un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 6, où l'on suppose que les victimes sont réparties uniformément entre les deux sexes.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de femmes qui figurent parmi les blessés ce jour là, et Y le nombre d'hommes.

(1). Déterminer les lois de probabilités de X et Y. Préciser ensuite leurs espérances mathématiques et leurs variances.

(2). Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

(3). En déduire la probabilité qu'il y ait autant de femmes que d'hommes blessés ce jour-là aux urgences.

Pistes de réflexion

(1). On remarquera que $[X = k] = \bigcup_{n \geq k} ([X = k] \cap [Y = n - k])$ et que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 6.

(2). On montrera que $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

(3). On commencera par remarquer que $[X = Y] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} ([X = k] \cap [Y = k])$.

Manipuler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice| [4370] | 9| Manipuler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse.
La valeur de p est inconnue mais on souhaiterait en connaître une estimation.
Pour cela, on prélève n pièces et on note Z_n le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement.
On considère que le nombre total de pièces dans l'usine est assez grand pour que le prélèvement des n pièces soit considéré comme une suite de n tirages avec remise.
L'idée est d'approcher la valeur de p par la valeur de $\frac{Z_n}{n}$. On va donc chercher à partir de quelle valeur de n cette approximation sera « bonne ».

(1). Quelle est la loi de Z_n ?

(2). En déduire l'espérance et la variance de Z_n.

(3). (a). Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.

(b). Montrer que, pour tout $\varepsilon \geq 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$.

(c). En déduire une condition sur$n$ pour que $\frac{Z_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Pistes de réflexion

(1). On pourra essayer de dégager un schéma de Bernoulli pour justifier que Z_n suit une loi binomiale dont on identifiera les paramètres.

(2). Il suffit d'expliciter dans ce cadre la formule donnant l'espérance d'une loi binomiale.

(a). Un étude rapide de la fonction $x \longmapsto x(1 - x)$ sur $[0; 1]$ permet d'obtenir cette inégalité.

(b). Il s'agit de mettre en oeuvre l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev pour la variable aléatoire $\frac{Z_n}{n}$.

(c). La majoration précédente donne la valeur de n cherchée.

Exercice| [4371] | 10| Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On sait que 40% des individus d'une population possèdent un certain caractère C. On considère un échantillon de 200 personnes de cette population.
Peut-on affirmer, à plus de 80%, que dans cet échantillon il y a entre 30 et 50% de personnes ayant le caractère C ?

Pistes de réflexion

- Il s'agit d'introduire ici une variable aléatoire à laquelle on appliquera l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- On pensera notamment à transformer le problème en un problème de prélèvement dans une population.

Travail autonome

Exercice| [1244] | 11| Étude d'une répétition d'une expérience aléatoire à l'aide d'une variable aléatoire

Lors d'une compétition sportive, un athlète a la probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir son n^e saut. Il est éliminé dès qu'il échoue à un saut.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sauts effectués.

(1). Quelle est la loi de X ? Vérifier que l'expression trouvée définit bien une loi de probabilité.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra faire intervenir la formule des probabilités composées pour décomposer l'événement $[X = k]$.

(2). On mettra en forme la série numérique dont on doit étudier la convergence absolue pour s'assurer de l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, et on pourra ensuite en calculer leurs valeurs en utilisant les développements en série entière usuels, et ne pas oublier d'utiliser la formule de Huygens pour calculer la variance de X.

Exercice| [4363] | 12| Étude d'un rang d'apparition lors de lancers successifs de dés

Un joueur lance deux dés parfaitement équilibrés jusqu'à ce qu'il obtienne un « double-six ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui ont été effectués pour obtenir ce premier « double six ».

(1). Donner la loi de probabilité de la variable X.

(2). Montrer que X admet une espérance mathématique, puis la calculer. Comment interpréter ce résultat ?

(3). On désigne maintenant par Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que la somme des deux dés soit supérieure ou égale à 10.

(a). Quelle est la loi de Y ?

(b). Montrer que Y admet une espérance mathématique, puis la calculer.

Pistes de réflexion

(1). On justifiera que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puis on décomposera l'événement $[X = k]$ à l'aide d'événements décrivant les résultats des lancers précédents pour pouvoir ensuite utiliser la formule des probabilités composées.

(2). Il s'agira de revenir à la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète en s'assurant de la convergence absolue d'une série numérique, puis d'en calculer sa somme à l'aide des développements en séries entières usuels.

(3). (a). La loi de Y s'obtient sur le même principe que la loi de X dans le sens où on s'intéresse à l'événement « obtenir une somme supérieure à 10 » au lieu de « obtenir un double-six » qui n'est ni plus ni mois que « obtenir une somme supérieure à 12 ».

(b). Il s'agira de revenir à la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète en s'assurant de la convergence absolue d'une série

Exercice| [4367] | 13| Étude d'un premier rang d'apparition lors d'une succession de lancers

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc « pile » ou « face » avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.
On note P_k (respectivement F_k) l'événement : « on obtient pile (respectivement face) au k^{e} lancer ».
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « face » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k, où k désigne un entier supérieur ou égal à 2. X prend la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

(1). Calculer $\mathbb{P}([X=2])$.

(2). En remarquant que $[X=3]=(P_1\cap P_2\cap F_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)$, calculer $\mathbb{P}([X=3])$.

(3). Soit k un entier supérieur ou égal à 3.
Écrire lévénement $[X=k]$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.

(4). Déterminer alors $\mathbb{P}([X=k])$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

(5). Calculer alors $\mathbb{P}([X=0])$. Comment interpréter ce résultat ?

Pistes de réflexion

(1). C'est immédiat que $[X=2]=P_1\cap F_2$ et la formule des probabilités composées permet de conclure.

(2). Il s'agit ici d'analyser comment obtenir le premier basculement « Pile/face » lors du troisième lancer, puis de conclure à l'aide de la formule des probabilités composées.

(3). On généralise le raisonnement précédent en écrivant l'événement $[X=k]$ à l'aide des événements $(P_1,\ldots,P_k)$ et $(F_1,\ldots,F_k)$.

(4). On écrira la formule des probabilités composées pour chacun des termes obtenus à l'aide de la décomposition de $[X=k]$ disjointe obtenue à la question précédente.

(5). On remarquera que $[X=0]$ ne peut se produire que si aucun des événements $[X=k]$ avec $k\neq 0$ ne se produisent.