Lois et lois marginales

Exercice| [1246] | 1| Couples de Variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies dont la loi est définie par le tableau suivant :

(1). À quel intervalle doit appartenir p pour que ces données soient acceptables ?

(2). Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ et le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.

(3). Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.

Y \ X	0	1
0	p	$\frac{1}{2} - p$
1	$\frac{1}{3} - p$	$\frac{1}{6} + p$

Pistes de réflexion

(1). Toutes les probabilités des événements $[X = i] \cap [Y = j]$ où $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ doivent être positives et leur somme égale à 1.

(2). Il s'agit dans un premier temps de déterminer les lois marginales de X et Y, pour ensuite en calculer leur espérance et leur variance.

(3). On doit avoir $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$ pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exercice| [1247] | 2| Étude de l'indépendance de deux variables aléatoires

Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous. On pose $Y = X^2$.

(1). Déterminer la loi du couple (X, Y) puis celle de Y.

(2). Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}([X = i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Pistes de réflexion

(1). On commence par identifier le support Ω, puis que certains événement $[X = i] \cap [Y = j]$ sont de probabilité nulles.

(2). On détermine la covariance de X et Y en calculant au préalable $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$, puis le coefficient de correlation linéaire. On s'assurera du caractère indépendant au non de X et Y en vérifiant si $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$ pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exercice| [1330] | 3| Étude de l'indépendance de deux variables aléatoires

Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
On tire successivement et sans remise deux jetons et on note X et Y les variables aléatoires réelles discrètes correspondantes respectivement au premier et au second numéro obtenus.

La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-contre.

(1). Donner les lois marginales de X et de Y.

(2). Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(3). Les variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont-elles indépendantes ?

X \ Y	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit d'obtenir les lois marginales en utilisant successivement les systèmes complets d'événements associés à chacune des ces deux variables aléatoires.

(2). On commencera par calculer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(Y)$ et enfin EXY.

(3). Soit on vérifie que $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$ pour tout (i, j) ß$X(\Omega) \times Y(\Omega)$, soit on trouve un tel couple (i, j) qui ne le satisfait pas, ou plus simplement, interpréter le résultat de la question précédente.

Exercice| [4359] | 4| Étude d'un tirage de boules dans une urne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n.
La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boîte choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

(1). Déterminer la loi du couple (X, Y).

(2). Calculer alors $\mathbb{P}([X = Y])$.

(3). Quelle est alors la loi de Y ?

(4). Déterminer alors l'espérance mathématique de Y.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier les supports de X et Y. On calculera les probabilités $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$ à l'aide de la formule des probabilités composées et en remarquant que certaines probabilités $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = 0$.

(2). On commencera par écrire que $[X = Y] = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i])$ et on utilisera alors la loi du couple (X, Y) pour conclure.

(3). Il s'agit de déterminer d'une des deux lois marginales à l'aide d'un système complet d'événements associé à l'autre variable aléatoire.

(4). Le calcul de l'espérance de Y se fait à l'aide d'une somme finie.

Covariance et coefficient de corrélation

Exercice| [1313] | 5| Coefficient de corrélation d'un couple de variable aléatoire

Soit X une variable uniforme sur $[\![0;3]\!]$ et $Y = (X-1)^2$.

(1). Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

(2). Calculer alors la covariance de X et Y puis leur coefficient de corrélation linéaire.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier le support de Y et remarquer que certains événements $[X = i] \cap [Y = j]$ sont de probabilité nulles.

(2). On commencera par déterminer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(Y)$ et enfin $\mathbb{E}(XY)$ pour obtenir $\operatorname{Cov}(X, Y)$. Restera ensuite le calcul de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ pour obtenir le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Exercice| [1252] | 6| Covariance d'un couple de variables aléatoires

Dix boules numérotées de 1 à 10 sont placées dans une urne. On tire une boule au hasard, on note Y le reste de la division par 2 du numéro de la boule tirée et Z le reste de la division par 3 du numéro de la boule tirée.

(1). Donner la loi du couple (Y, Z).

(2). Calculer $\operatorname{Cov}(Y, Z)$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier le support de Y et Z. On pourra s'aider de la variable aléatoire X égale au numéro de la boule obtenue lors du tirage pour décrire les événements $[Y = j]$, $[Z = k]$ et $[Y = j] \cap [Z = k]$.

(2). Il s'agit de calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Z)$ puis $\mathbb{E}(YZ)$ dans le cas de variables aléatoires finies en ayant au préalable déterminé les lois de Y et Z.

Exercice| [1310] | 7| Étude du fonctionnement d'un ascenceur

Un ascenseur dessert un immeuble de 10 étages. Douze personnes sont au rez-de-chaussée et montent dans l'ascenseur. On suppose que les choix des étages auxquels descendent les 12 personnes sont indépendantes les uns des autres.
Pour tout $i \in [\![1;10]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon. On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

(1). Déterminer la loi des variables aléatoires X_i.

(2). Pour $i \neq j$, calculer $\mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0])$ et en déduire la loi du couple (X_i, X_j) ainsi que $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.

(3). Exprimer X en fonction des X_i et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). Les variables aléatoires X_i suivent une loi de Bernoulli dont il faut identifier le paramètre.

(2). L'événement $[X_i = 0] \cap [X_i = 0]$ ne se produit que si personne ne descend aux étages i et j. Pour la loi du couple, on pourra passer par les lois marginales qui sont connues.

(3). Il est presque immédiat de remarquer que $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$.