Quelques automatismes avec les complexes

Exercice| [2865] | 1| Calcul algébrique avec les complexes

Calculer i^7 et i^{18} puis $(2\mathrm{i})^6$ et $(-3\mathrm{i})^9$.

Pistes de réflexion

- On se rappelle que $\mathrm{i}^2 = -1\ldots$
- On décomposera les puissances de i qui interviennent à l'aide des opérations sur les puissances, de sorte à faire apparaître i^2.

Exercice| [2866] | 2| Forme algébrique d'un complexe

Donner la forme algébrique des complexes $(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$ et $(1-2\mathrm{i})^3$.

Pistes de réflexion

- On utilise les rèlges opératoires sur les complexes, en se rappelant que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- On pourra par ailleurs utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice| [4766] | 3| Conjugué d'un nombre complexe

Déterminer le conjugué des complexes suivants :

$1-\mathrm{i}$ | $\mathrm{i}+2$ | $3-2\mathrm{i}$

$3\mathrm{i}$ | $(1+\mathrm{i})+(3-\mathrm{i})$ | $(-1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$ | $(2+3\mathrm{i})^2+(5-\mathrm{i})$

Pistes de réflexion

Deux stratégies se profilent :
- soit obtenir la forme algébrique du complexe donné, puis prendre son conjugué ;
- soit utiliser les règles opératoires sur les conjugués pour obtenir un calcul à effectuer qui donnera l'expression du conjugué

Exercice| [2869] | 4| Forme algébrique de quotients

Déterminer la forme algébrique des complexes :

$$z_1 = \frac{4-14\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}\ ;\qquad z_2 = \frac{1}{2+\mathrm{i}} - \frac{1}{3-\mathrm{i}}\ ;$$

$$z_3 = \frac{1-4\mathrm{i}}{1+5\mathrm{i}} - \frac{1+4\mathrm{i}}{1-5\mathrm{i}}\ ;\qquad z_4 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\ ;$$

Pistes de réflexion

- On fera opérer les règles opératoires en se souvent que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- On obtiendra la forme algébrique des quotients ou inverses de complexes à l'aide du conjugué de leurs dénominateurs.

Exercice| [2079] | 5| Sommes finies

À l'aide de la formule du binôme, calculer :

$A = (1+\mathrm{i})^8$ | $B = (1-\mathrm{i})^7$ | $C = (2-3\mathrm{i})^5$ | $D = (5+4\mathrm{i})^6$

On exprimera les résultats sous forme algébrique, c'est à dire sous la forme $a+\mathrm{i}\,b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Déduire des calculs précédents :

$$\sum_{k=0}^{7}(1+\mathrm{i})^k \qquad \sum_{k=0}^{6}(1-\mathrm{i})^k \qquad \sum_{k=0}^{4}(2-3\mathrm{i})^k \qquad \sum_{k=0}^{5}(5+4\mathrm{i})^k$$

Pistes de réflexion

(1). Écrire le triangle de Pascal jusqu'à un ordre suffisant, puis développer la formule du binôme correspondante, puis mettre sous forme algébrique l'expression obtenue en calculant les puissances de i qui apparaissent.

(2). Cela ressemble beaucoup à une somme du type $\sum_{k=0}^{n} q^k\ldots$

Équation de degré 2

Exercice| [4771] | 6| Équations de degré 2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x en donnant éventuellement les solutions complexes :

$(E_1)\ :\ x^2 - 8\sqrt{3}x + 64 = 0$ | $(E_2)\ :\ x^2 - 5x + 9 = 0$

$(E_3)\ :\ x^2 + x + 1 = 0$ | $(E_4)\ :\ x^2 - 2x + 3 = 0$

Pistes de réflexion

Pour chacune de ces équations du second degré :
- on calculera le discriminant ;

- on mettra en forme les solutions selon le signe de ce discriminant.

Travail autonome

Exercice| [4769] | 7| Forme algébrique d'un complexe

Soient les nombres complexes $z = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z' = -4 + \mathrm{i}$. Donner la forme algébrique des complexes suivants :

$z_1 = z + z'$	$z_2 = 3z - 2z'$	$z_3 = zz'$
$z_4 = z^2$	$z_5 = z'^3$	$z_6 = (1 - z)(5 + z')$

Pistes de réflexion

- On se contente d'appliquer les règles opératoires dans $\mathbb{C}$ en se rappelant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice| [0293] | 8| Forme algébrique d'un complexe

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{3 + 6\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}}$	$z_2 = \left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{1 - 7\mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}}$	$z_3 = \dfrac{2 + 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} + \dfrac{2 - 5\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

Pistes de réflexion

- On mobilisera toutes les règles opératoires sur les nombres complexes en se souvenant que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Par ailleurs, on transforme les expressions du type $\dfrac{1}{a + \mathrm{i}\,b}$ en utilisant le conjugué du complexe $a + \mathrm{i}\,b$: $\dfrac{1}{a + \mathrm{i}\,b} = \dfrac{a - \mathrm{i}\,b}{(a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b)}$.

Exercice| [4768] | 9| Quotients complexes de complexes

Donner la forme algb́rique des complexes suivants :

$\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{(2 + \mathrm{i}) - 5}$	$2 + \mathrm{i} - \dfrac{1}{1 + 2\mathrm{i}}$	$1 - 3\mathrm{i} + \dfrac{2 + \mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$	$\dfrac{5\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i} - (2 - 5\mathrm{i})}$

Pistes de réflexion

- On se rappelle que l'on obtient la forme algébrique d'un quotient de complexes en utilisant le conjugué de son dénominateur.

Exercice| [1823] | 10| Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner les résultats sous forme algébrique.

$(2 - \mathrm{i})z = 4 - \mathrm{i}$	$\dfrac{1}{2z - \mathrm{i}} = -1 + 2\mathrm{i}$	$\dfrac{z + \mathrm{i}}{2z - \mathrm{i}} = 5$

Pistes de réflexion

- On résout ces équations avec les techniques habituelles, en isolant dans un des deux membres l'inconnue z.
- On n'oubliera pas de donner les solutions sous forme algébrique.