Calculs de moments pour une variable aléatoire

EX. 1 | Réf. 3527

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne deux points, sinon il perd trois points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Exprimer Y en fonction de X.
3. En déduire la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3527

1. On commencera par expliciter le support de X pour ensuite déterminer les probabilités des événements correspondants.
2. Le lien est direct à partir du système de décompte des points.
3. On utilisera les propriétés opératoires de l'espérance et de la variance.

EX. 2 | Réf. 3522

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X puis $\mathbb{E}(X)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3522

- On explicitera le support de X...
- puis on explicitera les événements correspondants en terme de tirages pour déterminer la loi de X.

EX. 3 | Réf. 3526

Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases, se cache un louis d'or. On retourne 8 cases au hasard. Soit X la variable aléaoitre égale au nombre de louis d'or découverts.
Déterminer la loi de X puis son espérance et sa variance.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3526

- On explicitera le support de X...
- puis on identifiera les situations correspondants aux valeurs prises par X pour déterminer les probabilités correspondantes, en supposant que l'on a équiprobabilité.

EX. 4 | Réf. 1262

On dispose de deux boîtes A et B. Au départ, la boîte A contient deux jetons marqués 0 et la boîte B deux jetons marqués 1. On extrait au hasard et simultanément un jeton de A et un jeton de B et on les échange. On effectue cette manipulation n fois, et on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans A à l'issue des n manipulations.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Exprimer la loi de X_n en fonction de X_{n-1}.
3. En déduire l'espérance de X_n.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1262

1. On explicitera le support de X_1 avant de calculer les probabilités correspondantes en explicitant les situations correspondantes à ces valeurs.
2. On explicitera le support de X_n et on procèdera au même raisonnement en tenant compte de ce qu'il s'est passé à

l'instant $n-1$.

3. On utilisera la linéarité de l'espérance.

Utiliser le théorème du transfert

EX. 5 | Réf. 3523

On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. La probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On appelle X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition.

2. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3523

1. Le support de X est immédiat, sa loi se déduisant de la traduction de l'énoncé sur le lien entre les valeurs prises par X et la probabilité correspondante.

2. On utilise alors le théorème du transfert pour l'espérance.

EX. 6 | Réf. 1270

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

EX. 6 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1270

- On applique directement le théorème du transfert et on retombe sur une somme faisant intervenir le binôme de Newton.

EX. 7 | Réf. 3524

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=[\![1;n]\!]$ telle que :

$$\forall i\in[\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([X=i])=\frac{3i(i+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

On pose $Y=\dfrac{1}{X+1}$. Déterminer l'espérance de Y.

EX. 7 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3524

- On applique le théorème du transfert, et il s'agit ensuite de calculer une somme finie, possiblement avec une décomposition du terme général de cette somme.

Lois usuelles

EX. 8 | Réf. 1300

Soit $a\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire uniforme sur $[\![0;a]\!]$.
On suppose que $\mathbb{E}(X)=6$. Trouver a.

EX. 8 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1300

- On utilise la formule donnant l'espérance d'une loi uniforme.

EX. 9 | Réf. 3528

On modélise le nombre annuel d'accidents d'un conducteur par une loi binomiale de paramètres n et p où p est la probabilité d'avoir un accident à chaque utilisation et n le nombre de fois où il utilise sa voiture.

1. Le modèle vous semble-t-il pertinent ?
2. Le nombre moyen d'accidents des conducteurs a été mesuré à 2,6 et et sa variance à 1,96. Déterminer les paramètres de la loi.

EX. 9 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3528

1. On reviendra au modèle de construction d'une loi binomiale et on regardera si ici cela es pertinent.
2. On mobilise les formules donnant l'espérance et la variance d'un loi binomiale.

EX. 10 | Réf. 1309

1. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(8;\,0{,}3)$.
   a. Pour $0 \leq k \leq 7$, calculer $\dfrac{\mathbb{P}([X=k+1])}{\mathbb{P}([X=k])}$.
   b. En déduire la valeur de k telle que $\mathbb{P}([X=k])$ soit maximale. Cette valeur s'appelle le mode de la distribution.
2. Plus généralement, soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n;\,p)$.
   a. Pour $0 \leq k \leq n-1$, calculer $\dfrac{\mathbb{P}([X=k+1])}{\mathbb{P}([X=k])}$.
   b. En déduire la (ou les) valeur(s) de k telles que $\mathbb{P}([X=k])$ soit maximale, ce(s) valeur(s) s'appellant alors le(s) mode(s) de la distribution.

EX. 10 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1309

1. a. On fait le calcul...
   b. Il s'agit d'étudier une fonction...
2. On procède comme précédemment.