Autour des probabilités conditionnelles

EX. 1 | Réf. 0638

On interroge 1 000 personnes réparties en trois catégories : I, II et III.
Les réponses à la question posée sont : satisfait, mécontent, indifférent.
Les résultats de l'enquête sont données dans le tableau ci-contre :

	Satisfait	Mécontent	Indifférent
I	150	100	50
II	250	100	50
III	100	100	100

On choisit au hasard une personne parmi les 1 000. Si X est la personne choisie, déterminer les probabilités des événements suivants :

1. $X \in II$ et X n'est pas satisfait.
2. $X \notin I$ ou X est indifférent.
3. $X \notin I$ sachant qu'il est mécontent.
4. X est mécontent sachant qu'il n'est pas satisfait et qu'il n'appartient pas au groupe I.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0638

- On interprêtera les événements explicités ici comme étant un élément du tableau, que ce soit une cellule centrale ou terminale de ligne/colonne.
- Cette situation relevant de l'équiprobabilité...le calcul de probabilités demandé se ligne à une problématique de comptage.

EX. 2 | Réf. 0642

Dans une population, on étudie deux caractères génétiques notés A et B. 55% des individus possèdent le caractère A, 42% possèdent le caractère B et 27% des individus ne possèdent ni le caractère A, ni le caractère B. On choisit au hasard un individu dans la population.

1. Calculer la probabilité qu'il possède le caractère A sachant qu'il possède le caractère B.
2. Calculer la probabilité qu'il possède le caractère B sachant qu'il possède le caractère A.

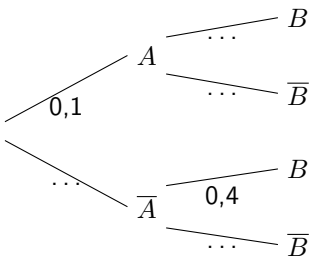
EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0642

1. On traduira la définition de la probabilité conditionnelle demandée, puis on déterminera les probabilités des événements mis en jeu dans cette dernière en remarquant que l'on peut supposer qu'il y a équiprobabilité.
2. On traduira la définition de la probabilité conditionnelle demandée, puis on déterminera les probabilités des événements mis en jeu dans cette dernière en remarquant que l'on peut supposer qu'il y a équiprobabilité.

EX. 3 | Réf. 3494

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.
On sait de plus que $\mathbb{P}(B) = 0.39$.

1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire $\mathbb{P}_A(B)$.



EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3494

1. On s'aidera de cet arbre pondéré pour expliciter la probabilité demandée.
2. Il restera à mettre en oeuvre la formule des probabilités composées.

EX. 4 | Réf. 3495

Un groupe d'élèves d'une classe de Terminale veut organiser un concert de musique à l'intérieur du lycée. Il fait une enquête pour connaître le nombre d'élèves souhaitant assister à ce concert en faisant remplir une fiche aux personnes interrogées.
450 élèves on répondu à cette enquête, 270 filles et 180 garçons.
144 filles, et 72 garçons sont favorables.
On note :

F **l'événement :** « la fiche réponse est celle d'une fille »

G **l'événement :** « la fiche réponse est celle d'un garçon »

A **l'événement :** « l'élève souhaite assister au concert »

On prélève au hasard un fiche réponse parmi les fiches rendues.

1. Donner les probabilités $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap G)$ et $\mathbb{P}(A \cup G)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap F)$ puis $\mathbb{P}_F(A)$.
3. Déterminer ensuite $\mathbb{P}_A(G)$ et $c\mathbb{P}(G)\,A$,.
4. Donner les probabilités $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap F\right)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap G\right)$. En déduire $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$ de deux manières.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3495

1. Ces dernierères probabilités relèvent d'une lecture de l'énoncé.
2. On pourra utiliser les évènements $\{F, G\}$ pour décomposer l'événement A.
3. On explicitera les formules de probabilités conditionnelles demandées.
4. On pourra utiliser les événements $\left\{A, \overline{A}\right\}$ pour décomposer les événements F et G.

EX. 5 | Réf. 3496

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation. Au vue de son expérience, le commercial estime que :

- La probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à $0,25$;
- Si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à $0,4$;
- La probabilité que le premier client n'achète pas le produit mais que le second client l'achète est égale à $0,3$.

On note A l'évément « le premier client achète le produit » et B l'événement « le second client achète le produit ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un seul client achète le produit.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3496

1. On utilisera les événements $\left\{A, \overline{A}\right\}$ pour expliciter B et utiliser ensuite la formule des probabilités composées.
2. On cherche donc la probabilité de $A \cup B$.

Probabilités totales et composées

EX. 6 | Réf. 1276

On dispose de deux urnes A et B. Chaque urne contient 7 enveloppes.

- dans l'urne A, les 7 enveloppes sont vides ;
- dans l'urne B, il y a 6 enveloppes vides et une qui contient un billet de 500 €.

Jean, qui ne sait plus dans quelle urne est le billet, choisit l'urne A avec la probabilité p, et donc l'urne B avec la probabilité $1-p$. Il tire une à une les enveloppes. Les 6 premières enveloppes tirées sont vides.
On définit alors les événements :

- A : « Jean a choisi l'urne A »
- B : « Jean a choisi l'urne B »
- V : « Les 6 premières enveloppes tirées sont vides »

Quelle est la probabilité pour que Jean obtienne le billet en ouvrant la dernière enveloppe ?

EX. 6 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1276

- Il s'agira de traduire le questionnement sous forme d'une probabilité conditionnelle.
- Il restera à expliciter les probabilités des événements qui interviennent dans cette dernière.

EX. 7 | Réf. 3498

Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

1. On obtient un « six ». Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2. Au contraire, on a obtenu un « cinq ». Même question.

EX. 7 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3498

1. On remarquera que le résultat du dé est conditionné par le dé utilisé, ce qui implicitement fait alors penser à la formule des probabilités totales ici.
2. On procède au même type de raisonnement.

EX. 8 | Réf. 3499

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

EX. 8 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3499

- On remarquera que l'on peut être malade avec un test positif et un test négatif...

Indépendance en probabilités

EX. 9 | Réf. 3500

Une promotion détudiants comporte 4 garçons et 6 filles de première année, 6 garçons et n filles de deuxième année. Pour quelle valeur de n, les évéments « être une fille » et « être en première année » sont-ils indépendants ?

EX. 9 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3500

- On explicitera la relation permettant de s'assurer que deux événements sont indépendants.
- On calculera ensuite la probabilité des différents événements en supposant qu'il y a équiprobabilité.

EX. 10 | Réf. 1280

On lance un dé plusieurs fois en décidant de s'arrêter au premier 6 obtenu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- A_n : « le n^e lancer a lieu et amène 6 » ;
- B_n : « le n^e lancer a lieu et amène 1, 2, 3, 4 ou 5 ».

1. Justifier que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants et que $\overline{A_2} \neq B_2$.
2. On suppose que $n \geq 2$. Justifier que : $A_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap A_n$, et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

EX. 10 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1280

1. On reviendra à la définition de l'indépendance de deux événements en remarquant notamment que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ compte-tenu du protocole retenu ici. On pourra utiliser l'expression du contraire d'une union pour la comparaison de $\overline{A_2}$ etB_2.
2. La démarche faite pour le calcul de $\mathbb{P}(A_2)$ se généralise pour le calcul de $\mathbb{P}(A_n)$ où il s'agit d'étudier le rang d'apparition du premier six lors d'une succession de lancers.

EX. 11 | Réf. 1278

Parmi les deux événements suivants, quel est le plus probable ?

Événement n° 1 : « obtenir au moins un as en lançant 4 fois un dé » ;

Événement n° 2 : « obtenir au moins une fois un double as en lançant 24 fois deux dés ».

EX. 11 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1278

Pour les deux situations :

- on décomposera la situation à l'aide d'événements portant sur le résultat du i^{e}lancer ;
- on s'assurera de l'indépendance des événements qui interviennent si nécessaire.

Répétition d'expériences aléatoires

EX. 12 | Réf. 3497

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- G_n : « le joueur gagne la n^{e}partie »
- $p_n = \mathbb{P}(G_n)$.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. En déduire la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

EX. 12 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3497

1. On décompose l'événement conduisant au calcul de p_2 à l'aide de ce qu'il s'est passé au cours de la première partie.
2. On traduira cela avec des probabilités conditionnelles.
3. On commencera par traduire l'événement sous forme d'une union d'événements, que l'on calculera ensuite.
4. On reprend le même raisonnement que pour le calcul de p_2.
5. On aura reconnu une suite arithmético-géométrique.
6. On exploite simplement le résultat précédent.