Inégalités | Positivité et croissance de l'intégrale

EX. 1 | Réf. 5297

On désigne par I, J et K les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad J = \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \quad J = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Démontrer que :

$0 \leq I \leq 1$ | $I \leq J$ | $|K| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5297

Pour chacune des inégalités demandées :

- on écrira une inégalité portant sur la fonction à intégrer
- on mobilisera la croissance ou la positivité de l'intégrale

EX. 2 | Réf. 5301

1. Démontrer que : $\forall x \geq 1,\ \dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5301

1. On construira l'encadrement demandé à partir d'opérations sur les inégalités et les fonctions de références

2. Il s'agit d'utiliser la croissance de l'intégrale à partir de l'inégalité précédente.

EX. 3 | Réf. 5302

1. Démontrer que : $\forall t \geq 1,\ \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

2. En déduire que : $\forall x \geq 1,\ 1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$.

3. En déduire alors un encadrement de $\ln(2)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5302

1. On construira l'encadrement demandé à partir d'opérations sur les inégalités et les fonctions de références

2. Il s'agit d'utiliser la croissance de l'intégrale à partir de l'inégalité précédente.

3. On évalue en $x = 2\ldots$

EX. 4 | Réf. 5303

On admet que : $\forall x \geq 0,\ 1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$

1. En déduire que : $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

2. En déduire alors un encadrement de $\ln(2)$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5303

1. Il s'agit d'utiliser la croissance de l'intégrale à partir de l'inégalité donnée dont on peut se poser la question de comment l'établir.

2. On évalue en $x = 2\ldots$

Théorème fondamental de l'analyse

EX. 5 | Réf. 5300

On considère la fonction g définie par : $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les variations de g ainsi que son signe sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que : $\forall x \in \geq 1,\ g(x) \leq 1$.

4. Montrer que l'inégalité précédente est encore vraie pour $x \leq 1$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5300

1. C'est le théorème fondamental de l'analyse...

2. ...qui donne par ailleurs la dérivée de g, dont le signe est évident.

3. On utilisera la croissance de l'intégrale à partir d'un encadrement trivial de la fonction à intégrer.

4. On procède de même, en faisant attention à l'ordre des bornes d'intégration.

EX. 6 | Réf. 5298

On considère la fonction F définie par : $F : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$

1. Quel est le signe de la fonction F sur $]0;+\infty[$.

2. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, puis donner l'expression de $F'(x)$ sur cet intervalle.

3. Construire le tableau des variations de F sur $]0;+\infty[$. On ne demande pas les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

EX. 6 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5298

1. On mobilisera la positivité de l'intégrale après avoir étudié le signe de la fonction à intégrer.

2. C'est le théorème fondamental de l'analyse qui intervient ici...

3. On connaît $F'(x)$ et surtout son signe...

Suites définies par une intégrale

EX. 7 | Réf. 2158

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{array} \right.$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(x))^n\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en étudier son signe.

b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Justifier que, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right)$.

c. Quelle est alors la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Calculer I_0 et I_1.
On pourra pour cette dernière remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{x-1}{x+1} = -1 + \frac{2x}{x+1}$$

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad (f(x))^2 + f'(x) = 1$.

5. Calculer alors $I_{n-2} - I_n$ pour tout $n \geq 2$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EX. 7 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2158

1. **a.** On pensera à essayer de réduire ou mieux le numérateur de $f'(x)$ pour en faciliter l'étude du signe.

b. On mettra en evidence les termes prépondérants.

c. On récapitule les résultats précédents dans le tableau de variation.

2. **a.** On exploite le tableau de variation de f.

b. On utilisera la croissance de l'intégrale pour obtenir le majorant demandé.

c. Le théorème d'encadrement est direct ici.

3. Pas de difficulté particulière pour I_0 et pour I_1, on se sert de l'indication pour proposer une autre expression pour $f(x)$.

4. Il suffit d'être précautionneux dans la mise au même dénominateur notamment.

5. On commencera par factoriser l'expression de la fonction à intégrer, pour faire ensuite intervenir le résultat de la question précédente et voir apparaître une forme du type $u' \times u^n$.

6. **a.** On utilise le résultat de la question précédente directement dans le calcul de la somme.

b. Le calcul de la limite est direct.

EX. 8 | Réf. 2052

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0.

2. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + a_{n+2}$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EX. 8 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2052

1. On remarquera qu'intervient la dérivée d'une fonction de référence...

2. On majorera la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^n}{1+t^2}$ puis on utilisera la croissance de l'intégrale. Le théorème d'encadrement permettra de conclure.

3. **a.** On remarquera que $t^{n+2} + t^n = t^n\left(1+t^2\right)$.

b. On fera intervenir la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^n$ dont on connaît l'expression puis on utilisera la linéarité de l'intégrale, tout en faisant le lien avec la somme demandée.

Fonctions définies par une intégrale

EX. 9 | Réf. 5299

On considère la fonction f définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^{1+x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$

On désigne par ailleurs G une primitive de la fonction $g : t \longmapsto \ln(t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer la dérivée de la fonction $t \longmapsto t\ln(t) - t$ sur $]0;+\infty[$.

3. Retrouver à l'aide de la question précédente, l'expression de $f'(x)$ obtenue précédemment.

EX. 9 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5299

1. On remarquera que $f(x) = G\left(1+x^2\right) - G(1)$ ce qui assurera le résultat par composition.

2. Le calcul ne présente pas de difficulté...

3. La question précénte donne l'expression de G, qu'il suffit alors de réinvestir pour le calcul de primitive.

EX. 10 | Réf. 3112

On considère la fonction f définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

On note par ailleurs g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ et G l'unique primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, c'est à dire $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer pour tout réel x, $f(x)$ à l'aide de la fonction G.

2. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer pour tout réel x, $f'(x)$.

3. Montrer que f est une fonction impaire.

4. Étudier les variations de f.

5. **a.** Soit $x \in]0;+\infty[$. Justifier que pour tout $t \in [x;2x]$, $\quad \mathrm{e}^{-4x^2} \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-x^2}$.

b. En déduire que pour tout $x > 0$, $\quad x\mathrm{e}^{-4x^2} \leq f(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2}$.

c. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EX. 10 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3112

1. On remarquera que $f(x) = G(2x) - G(x)$...

2. ...et on obtient alors ici le résultat par composition.

3. On évalue $f(-x)$, et on fera intervenir le changement de variable $u = -x$ pour retrouver l'expression de $f(x)$.

4. On dispose de l'expression de $f'(x)$ dont il suffit d'étudier le signe...

5. **a.** On mobilisera la croissance de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[x;2x]$.

b. On utilisera la croissance de l'intégrale...

c. ...puis le théorème d'encadrement des limites.