Calcul par primitivation directe

EX. 1 | Réf. 4842

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3+3x^2-2x+1\right)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 x\left(x^2-2\right)^3\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-x+3}{x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_1^3 \frac{(\ln(x))^2}{x}\,\mathrm{d}x$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4842

1. C'est un polynôme à primitiver...
2. On pensera aux dérivées des fonctions $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{x^2}$...
3. On pensera à une forme $u'u^n$...
4. On pensera à la dérivée de $x\longmapsto\sqrt{u(x)}$...
5. On transformera ce quotient en somme...
6. On pensera à une forme $u'u$...
7. On pensera à la dérivée de u^n...
8. On pensera à une forme $u'u^n$...

EX. 2 | Réf. 4843

1. Mettre sous forme d'un seul quotient $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{2}{x-3}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2},3\right\}$.
2. Calculer alors $\displaystyle\int_4^5 \frac{-3x-5}{(2x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4843

1. On se contente de faire une mise au même dénominateur
2. On fera le lien avec la question précédente pour primitiver chacun des termes obtenus.

EX. 3 | Réf. 4844

1. Calculer la fonction dérivée de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)+1}{x}$.
2. En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $g:x\longmapsto\dfrac{\ln(x)}{x^2}$, puis la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4844

1. On dérive un quotient...
2. Il s'agit de revenir à la définition de ce qu'est une primitive, puis de l'utiliser ensuite dans le calcul d'intégrale proposé.

EX. 4 | Réf. 4845

Calculer les deux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4845

- Il suffit de se souvenir de la dérivée d'une fonction du type $x \longmapsto \cos(ax+b)$ ou $x \longmapsto \sin(ax+b)$ pour la recherche des primitives.

EX. 5 | Réf. 4847

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4-x+2x^2-x^3}{1-x^4} \end{array} \right.$.

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

2. Calculer alors $A = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4847

1. Il suffit de procéder à une mise au même dénominateur.

2. On utilise la décomposition précédente pour primitiver.

EX. 6 | Réf. 4848

On se propose de calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+x+1}{x+3}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer trois réels a, b et c telles que, pour tout $x \in [0;1]$:

$$\frac{2x^2+x+1}{x+3} = ax+b+\frac{c}{x+3}$$

2. En déduire la valeur de J.

EX. 6 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4848

1. On se contente de mettre au même dénominateur puis d'identifier les coefficients des numérateurs pour obtenir la décomposition voulue.

2. On utilise la décomposition précédente pour primitiver.

Calcul par intégrations par parties

EX. 7 | Réf. 4850

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les deux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

EX. 7 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4850

- On remarquera que $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$.
- Et de même, on remarque que $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.

EX. 8 | Réf. 4851

À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

EX. 8 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4851

- On procède à une intégration par parties en remarquant que $x^2\ln(x) = x^2 \times \ln(x)$.

EX. 9 | Réf. 4852

On se propose dans cet exercice, de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En remarquant que $x^2 = x^2 + 1 - 1$ calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties montrer que $I = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}J$.
3. Terminer le calcul de I.
4. En déduire que : $I + J = \dfrac{1}{2}$.

EX. 9 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4852

1. On se contente d'utiliser l'indication pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. On effectue une intégration par partie en remarquant que $x\arctan(x) = x \times \arctan(x)$.
3. On exploite simplement les deux questions précédentes.
4. On exploite simplement les résultats précdents.

EX. 10 | Réf. 3569

Calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(x^2 + 2x - 1\right)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

EX. 10 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3569

- On procède à deux intégrations par parties successives en faisant le choix d'abaisser le degré du facteur polynomial.

EX. 11 | Réf. 3572

Calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)\,\mathrm{e}^{\,3x}\,\mathrm{d}x$.

EX. 11 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 3572

- On procèdera à une intégration par parties où l'on dérivera la partie polynomiale.

EX. 12 | Réf. 4692

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{\,-2x}\,\mathrm{d}x$.

EX. 12 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4692

- On procède à deux intégrations par parties successives en faisant le choix d'abaisser le degré du facteur polynomial.

EX. 13 | Réf. 4693

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-3x} \cos(4x)\,\mathrm{d}x$.

EX. 13 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4693

- On procède à deux intégrations par parties successives, réalisées sur le même choix de dérivation d'un des facteurs, pour obtenir une relation vérifiée par l'intégrale I.

Calcul par changement de variables

EX. 14 | Réf. 4853

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$.

EX. 14 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4853

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

EX. 15 | Réf. 4854

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\,x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\,x}+1}}\,\mathrm{d}x$ á l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^{\,x}$.

EX. 15 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4854

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

EX. 16 | Réf. 4855

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{1+x}$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 1+\sqrt{x}$.

EX. 16 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4855

Pour les deux intégrales :

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

EX. 17 | Réf. 4856

On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Calculer alors l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$.

EX. 17 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4856

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

EX. 18 | Réf. 4857

Calcul l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable en posant $x = \sin(t)$.

EX. 18 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4857

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.

EX. 19 | Réf. 4858

Calcul l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x = \tan(t)$.

EX. 19 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4858

- On commence par gérer les bornes de la nouvelle intégrale.
- Puis de la relation $t = \ldots$, on détermine une relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$.
- On met ensuite en forme le changement de variables dans l'intégrale.