Séries géométriques

Exercice| [5246] | 1| Séries géométriques

Justifier que chacune des séries suivantes sont convergentes, puis en donner leur somme.

$\sum \frac{1}{5^n}$	$\sum_{n\geq 2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
$\sum_{n\geq 4} \frac{2^n}{3^{n-2}}$	$\sum \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$

Pistes de réflexion

Pour chacune de ces séries :

- on remarquera qu'il s'agit d'une série géométrique ou presque. . .
- . . .dont on justifiera la convergence à l'aide de sa raison,
- et dont la somme est alors connue, mais on fera attention à l'indice de départ de chaque série.

Séries téléscopiques et fractions rationnelles

Exercice| [5247] | 2| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

(1). Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

(2). Exprimer alors en fonction de n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(3). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à une réduction au même dénominateur pour ensuite identifier les numérateurs et obtenir un système qui permet de déterminer (a, b).

(2). On fera apparaître un téléscopage de termes pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(3). On passera à la limite dans le résultat précédent.

Exercice| [5248] | 3| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(1). Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

(2). Exprimer alors en fonction de n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(3). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à une réduction au même dénominateur pour ensuite identifier les numérateurs et obtenir un système qui permet de déterminer (a, b, c).

(2). On fera apparaître un téléscopage de termes pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(3). On passera à la limite dans le résultat précédent.

Exercice| [5249] | 4| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(1). Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

(2). Exprimer alors en fonction de n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(3). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à une réduction au même dénominateur pour ensuite identifier les numérateurs et obtenir un système qui permet de déterminer (a, b, c).

(2). On fera apparaître un téléscopage de termes pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(3). On passera à la limite dans le résultat précédent.

Séries téléscopiques et logarithme

Exercice| [5250] | 5| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(1). Exprimer en fonction de n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(2). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On mobilisera les propriétés opératoires de la fonction $\ln$ pour faire apparaître un télescopage de termes pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(2). On passera à la limite dans le résultat précédent.

Exercice| [5251] | 6| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum \ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$.

(1). Exprimer en fonction de n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(2). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On mobilisera les propriétés opératoires de la fonction $\ln$ pour faire apparaître un télescopage de termes pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(2). On passera à la limite dans le résultat précédent.

Exercice| [5252] | 7| Somme d'une série

On considère la série numérique $\sum \ln\left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln(n)\times\ln(n+2)}\right)$.

(1). Exprimer en fonction de n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(2). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On mobilisera les propriétés opératoires de la fonction $\ln$ pour faire apparaître un télescopage de termes pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(2). On passera à la limite dans le résultat précédent.

Séries téléscopiques et changement d'indice

Exercice| [5254] | 8| Somme d'une série

Dans cet exercice, on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ est tel que $a+b+c=0$.
On considère alors la série numérique $\sum u_n$ où l'on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$.

(1). Exprimer en fonction de n et de (a,b,c) le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

(2). Conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$, puis en donner sa somme.

Pistes de réflexion

(1). On fera procéder à des changements d'indices pour utiliser l'information $a+b+c$ pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

(2). On passera à la limite dans le résultat précédent.