Calculs de sommes « simples »

Exercice| [2492] | 1| Calculer une somme

Déterminer la valeur des sommes suivantes.

$\sum_{k=0}^{245} 8$	$\sum_{k=8}^{92} 32$	$\sum_{k=3}^{24} k$	$\sum_{k=16}^{254} k$

Pistes de réflexion

- Pour certaines sommes, il suffit d'être capable de compter le nombre de termes.
- Pour d'autres, il s'agit de remobiliser la formule d'une somme usuelle, mais qui est lacunaire ici.

Exercice| [2498] | 2| Opérations sur les sommes

On admet que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \sum_{k=10}^{78} (3k+5)$	$S_2 = \sum_{k=1}^{15} k\,(k+1)$	$S_3 = \sum_{k=1}^{15} (k^2 - 2k + 1)$

Pistes de réflexion

- On utilisera tout particulièrement la linéarité du symbole $\sum$ pour se ramener à des sommes usuelles.
- On n'oubliera pas de gérer la plage d'indexation si nécessaire pour appliquer les formules connues.

Exercice| [2979] | 3| Calcul de somme finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On admet que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exprimer en fonction de n la somme $S = \sum_{k=4}^{2n} \left(k^2 - (2k-1)^2\right)$.

Pistes de réflexion

- On pourra au préalable développer l'expression $k^2 - (2k-1)^2$ puis décomposer la somme à calculer à l'aide de sommes de références.
- On n'oubliera pas de gérer si nécessaire la plage d'indexation avant d'appliquer les formules de sommes usuelles.

Repérer et manipuler une somme géométrique

Exercice| [3097] | 4| Somme de termes d'une suite géométrique

Déterminer les sommes suivantes :

$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{4^k}$	$\sum_{k=3}^{8} 3 \times 2^k$	$\sum_{k=0}^{5} 3^{k+2}$	$\sum_{k=2}^{8} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Pistes de réflexion

- Pour chacune des sommes, il suffit de mobiliser la formule pour les sommes géométriques. . .
- . . .et gérer leur éventuel caractère lacunaire.

Exercice| [2701] | 5| Manipuler une somme géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que :

$\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{\frac{k}{2}} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$	$\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}$

Pistes de réflexion

- On essaiera de transformer les termes généraux des sommes de sorte à ramener les sommes à une forme du type $\sum q^k$.
- On mettra en oeuvre ensuite la formule correspondante, en gérant au mieux la plage d'indexation.

Exercice| [2977] | 6| Calcul de somme finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S = \sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{3^{k+1}}{4^k}\right)$.

Pistes de réflexion

- Transformer l'expression de sorte à faire intervenir $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
- Il ne faudra pas oublier de gérer la plage d'indexation avant d'utiliser la formule donnant la somme précédente.

Autour des changements d'indices

Exercice| [2502] | 7| Changement d'indice

Dans chacune des sommes suivantes, effectuez un changement d'indice, puis les calculer.

$\displaystyle\sum_{k=3}^{12}(k-2)$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(k+3)$	$\displaystyle\sum_{k=3}^{9}\frac{1}{2^{k+2}}$	$\displaystyle\sum_{k=2}^{8}10^{k-2}$

Pistes de réflexion

- On procédera au changement d'indice dans l'idée de modifier le terme général de la somme de sorte à le transformer en celui d'une somme de référence.
- On gérera ensuite si nécessaire la plage d'indexation afin de pouvoir appliquer les formules de sommes usuelles.

Exercice| [1780] | 8| Sommes

Soit n un entier naturel non nul, et $a_0, \ldots, a_{n+1}$ des nombres réels. Simplifier l'expression suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$.

Pistes de réflexion

- On remarque que $2-3+1=0$, ce qui nous fait dire que les termes de même indice qui apparaîtront dans la somme s'annuleront. Il reste donc à déterminer quels termes restent...
- Pour ce faire, on utlisera la linéarité du symbole $\sum$ et des changements d'indices pour mettre en évidence les termes qui s'éliminent et ceux qui restent.

Exercice| [2700] | 9| Changement d'indice

Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{50}\frac{k^2-k-2}{k-2}$ en utilisant le changement d'indice $j = k-2$.

Téléscopage de termes

Exercice| [1767] | 10| Sommes

Soit n un entier naturel non nul.

(1). En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, calculer $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(2). Sur le même principe, calculer $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de sommer membre à membre l'égalité proposée pour voir apparaître dans le membre de gauche une somme téléscopique, et dans le membre de droite, par linéarité du symbole $\sum$, on récupère la somme cherchée.

(2). Il suffit de s'inspirer de ce qui précède en partant de $(k+1)^4 - k^4 = \ldots$

Exercice| [2503] | 11| Somme tél/'escopique

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ où $n \geq 1$, en remarquant que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Pistes de réflexion

- À l'aide de la transformation proposée, on remarque que la somme à calculer porte sur la différence de deux termes successifs d'une même suite de réels.
- Il y a aura donc un effet de téléscopage entre les différences écrites, pour ne laisser que les premier et dernier termes de la suite considérée.

Exercice| [2504] | 12| Somme téléscopique

À l'aide d'un téléscopage de termes, exprimer en fonction de $n \geq 2$ la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Pistes de réflexion

- On commencera par transformer le terme général de la somme de sorte à faire apparaître la différence de deux termes successifs d'une même suite.
- On mobilisera les propriétés opératoires de la fonction logarithme pour cela.

Factorielles, coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice| [2997] | 13| Manipuler les factorielles et les coefficients du binôme

(1). Calculer $\binom{30}{2}$ et $\binom{30}{29}$.

(2). Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $A = \dfrac{n+2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

Pistes de réflexion

(1). On mettra simplement en forme les formules donnant les coefficients du binôme en simplifiant de façon pertinente les différentes écritures de factorielles.

(2). On remarquera avant de procéder à un réduction au même dénominateur que $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Exercice| [1781] | 14| Sommes

Soit n un entier naturel non nul.

(1). Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(2). On considère un réel $p \in]0;1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(3). Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

(4). Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} k = 3n4^{n-1}$.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton pour des valeurs pertinentes.

(2). La formule du binôme de Newton donne directement la réponse.

(3). Il s'agira de transformer le terme général de la somme à partir de l'écriture du coefficient binomial pour faire apparaître un autre coefficient binomial et une somme qui s'approche de la formule du binôme de Newton.

(4). On s'inspire des transformations réalisées à la question précédente pour calculer cette somme.

Exercice| [2702] | 15| Manipuler la formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1). Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k-1}$ en fonction de n.

(2). Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k} 3^{n-2k} = \left(\frac{17}{3}\right)^n$.

Exercice| [0821] | 16| Combinaisons

Calculer les sommes : $A = \binom{100}{0} + \binom{100}{2} + \binom{100}{4} + \ldots + \binom{100}{100}$ et $B = \binom{100}{1} + \binom{100}{3} + \binom{100}{5} + \ldots + \binom{100}{99}$ à partir de $A+B$ et $A-B$