Obtention de la matrice d'une application linéaire

Exercice| [4916] | 1| Matrices d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'application f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y-z, x-2y+z) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [4917] | 2| Matrices d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$

On considère l'application f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z-t, x-y-z+t, x-y+z+2t, x+y+2z-2t) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathbb{R}^4$.

Exercice| [3646] | 3| Matrice d'application linéaire

On considère l'application f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b+c}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille formée des quatres matrices élémentaires $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice| [0418] | 4| Application linéaire de matrices

Dans tout ce qui suite, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère alors $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array} \right.$.

(1). Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). T est-il un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que l'image par T d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à la combinaison linéaire des images par T de ces éléments.

(2). On se souviendra que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$. Il restera alors à calculer les images de ces matrices élémentaires par T et les exprimer sur cette même base.

(3). On utilisera le théorème de caractérisation des automorphismes par l'inversibilité de leur représentation matricielle.

Matrice d'une application linéaire | Noyau et image

Exercice| [3637] | 5| Base et noyau d'une application linéaire

On note $\mathcal{B}_4 = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère alors f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Pistes de réflexion

- On pourra directement utilser la représentation matricielle de f ou revenir grâce à cette dernière à l'expression analytique de f.
- On commencera par chercher une base du noyau, ce qui à l'aide du théorème du rang, nous donnera la dimension de l'image.
- La recherche du noyau pourra être ramenée à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f)$.

Exercice| [3638] | 6| Base et noyau d'une application linéaire

On note $\mathcal{B}_4 = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère alors f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Pistes de réflexion

- On pourra directement utilser la représentation matricielle de f ou revenir grâce à cette dernière à l'expression analytique de f.
- On commencera par chercher une base du noyau, ce qui à l'aide du théorème du rang, nous donnera la dimension de l'image.
- La recherche du noyau pourra être ramenée à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f)$.

Exercice| [3639] | 7| Base et noyau d'une application linéaire

On note $\mathcal{B}_4 = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère alors f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Pistes de réflexion

- On pourra directement utilser la représentation matricielle de f ou revenir grâce à cette dernière à l'expression analytique de f.
- On commencera par chercher une base du noyau, ce qui à l'aide du théorème du rang, nous donnera la dimension de l'image.
- La recherche du noyau pourra être ramenée à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f)$.

Exercice| [0868] | 8| Matrice d'une application linéaire

$\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_5)$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et $\mathcal{B}' = (f_1;\ f_2;\ f_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$, on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les relations ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(e_1) & = & f_1 & + & 2f_2 & + & f_3 \\ f(e_2) & = & f_1 & + & f_2 & + & 2f_3 \\ f(e_3) & = & -f_1 & & & - & 3f_3 \\ f(e_4) & = & -f_1 & - & 4f_2 & + & f_3 \\ f(e_5) & = & f_1 & + & 4f_2 & - & f_3 \end{array}\right.$$

(1). Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Pistes de réflexion

(1). On dispose déjà de l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ en fonction de ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2). Puisque l'on connaît déjà une famille génératrice de l'image, on commencera par déterminer une base du noyau puis ensuite, on cherchera par le théorème du rang, la dimension de l'image, pour extraire de la famille génératrice déjà connue, une famille libre qui nous donnera la base de $\mathrm{Im}(f)$ cherchée.