Endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$

Exercice| [3445] | 1| Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On admet que l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+y+z, x+2y) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(1). Déterminer les images par f de la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

(2). En déduire une base de l'image de f, puis le rang de f.

(3). Déterminer alors une base du noyau de f.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de se remémorer les éléments de $\mathcal{B}_3$ et d'en calculer les images par f.

(2). On sait que l'image de f est engendrée par la famille image de $\mathcal{B}_3$. Il reste à étudier le caractère libre de cette dernière.

(3). On pourra mobiliser le théorème du rang pour obtenir une information sur la dimension du noyau et donc limiter nos recherches à exhiber des éléments du noau par contemplation.

Exercice| [3455] | 2| Isomorphisme ou simple endomorphisme ?

On admet que l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 2x+3y-z, x-2z) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(1). Déterminer une base du noyau de f.

(2). f est-il un automorphisme ?

Pistes de réflexion

(1). On sera amené à traduire la définition de ce qu'est être dans le noyau de f pour un vecteur, sous forme d'un système linéaire que l'on résoudra pour obtenir une caractérisation des éléments du noyau de f.

(2). On mobilisera le théorème de caractérisation en automorphismes en dimension finie.

Exercice| [2185] | 3| Application linéaire

On admet que l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-2y, 2x-4z, y-3z) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.

Pistes de réflexion

- On connaît facilement une famille génératrice de l'image en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dont il faudra étudier le caractère libre, ce qui permettra d'obtenir le rang de f.
- On peut connaître aussi une base de $\operatorname{Ker}(f)$, ce qui donnera la dimension de ce dernier.
- Le théorème du rang liant ces deux dernières dimensions, il suffit donc d'en connaître une des deux pour connaître l'ordre est permettre de limiter notre recherche de bases pour $\operatorname{Ker}(f)$ ou $\operatorname{Im}(f)$ par simple contemplation.

Exercice| [1481] | 4| Applications linéaires

On admet que l'application g donnée par :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x+y-3z, 3x+2y-4z) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(1). Déterminer les images par g de la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

(2). Quel est le rang de g ?

(3). g est-il un automorphisme ?

Pistes de réflexion

(1). On se souviendra simplement des éléments de $\mathcal{B}_3$ dont on calculera l'image par g.

(2). Le rang de g est par définition la dimension de $\operatorname{Im}(g)$, dont on connaît seulement à ce stade une famille génératrice...

(3). On mobilisera ensuite le théorème de caractérisaiton des automorphismes pour conclure ici.

Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice| [3651] | 5| Base du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 - \dfrac{2b-c}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(1). Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

(2). Déterminer une base du noyau de f. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On s'assure que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

(2). On traduira l'appartenance d'un vecteur à $\operatorname{Ker}(f)$ sous forme d'un système que l'on résoudra et qui permettra d'obtenir une description des éléments de $\operatorname{Ker}(f)$. La nature de $\operatorname{Ker}(f)$ permettra de conclure quant à son injectivité et éventuellement sa bijectivité.