Travailler dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$

Exercice| [5229] | 1| Application linéaire

On considère l'application f donnée par $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que f est linéaire.

(2). Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1 = 1\,(0,)\, u_2 = (1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(3). Déterminer les images par f des vecteurs u_1 et u_2.

(4). Déduire de ce qui précède les images des vecteurs $v_1 = 2u_1 - 3u_2$ et $v_2 = -6u_1 + u_2$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). On s'assurera du caractère libre de cette famille, avant de donner un argument de dimension pour en obtenir le caractère base.

(3). Il s'agit de faire le calcul des images à l'aide des formules définissant f.

(4). On utilisera le caractère linéaire de f pour calculer les images de ces deux vecteurs.

Exercice| [4911] | 2| Application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x-y) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que f est une application linéaire.

(2). On désigne par $\mathcal{B}_2 = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- **(a).** Déterminer les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- **(b).** En utilisant le caractère linéaire de f, déterminer les images par f des vecteurs $u_1 = (2,-1)$ et $u_2 = (-3,2)$.

(3). Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2))$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). **(a).** On procède au calcul des images à partir de l'expression de f.

- **(b).** On décompose u_1 et u_2 sur $\mathcal{B}_2$, puis on utilise la linéarité de f.

(3). On obtiendra la liberté ou non de cette famille en remarquant qu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs...

Exercice| [5227] | 3| Application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+t, x+z+t, y+z+t) \end{array} \right.$

(1). Montrer que f est une application linéaire.

(2). On note $\mathcal{B}_4 = (e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,0,1), e_4 = (0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- **(a).** Déterminer les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- **(b).** En utilisant le caractère linéaire de f, déterminer les images par f des vecteurs $u_1 = (2,-1,1,-1)$ et $u_2 = (2,1,-3,2)$.

(3). Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). **(a).** On procède au calcul des images à partir de l'expression de f.

- **(b).** On décompose u_1 et u_2 sur $\mathcal{B}_2$, puis on utilise la linéarité de f.

(3). On pourra utiliser la caractérisation de la liberté d'une famille par sa représentation matricielle dans la base canonique.

Exercice| [5228] | 4| Application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y+z, x-y-z) \end{array} \right.$.

Dans tout ce qui suit, on identifiera les éléments de $\mathbb{R}^3$ et les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, on identifiera le vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.

(2). Déduire de ce qui précède que f est une application linéaire.

(3). On note $\mathcal{B}_3 = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- **(a).** Déterminer les images par f des matrices colonnes E_1, E_2 et E_3.
- **(b).** Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (E_1, E_2, E_3)$

Pistes de réflexion

(1). f est l'expression analytique d'une application de la forme $X \longmapsto AX$.

(2). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

- **(a).** On procède au calcul des images à partir de l'expression de f.
- **(b).** On pourra utiliser la caractérisation de la liberté d'une famille par sa représentation matricielle dans la base canonique.

Exercice| [5230] | 5| Application linéaire

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
On considère l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \Phi(x) = x - (x_1 + x_2 + x_3)\, v \end{array} \right.$$

(1). Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). On désigne par $\mathcal{B}_3 = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a). Exprimer en fonction de v les images par Φ de la base canonique.

(b). Déterminer un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par Φ est nulle.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). (a). Il s'agit de faire le calcul des images à l'aide des formules définissant Φ.

(b). On remarquera que v est tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

Travailler avec des endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice| [4912] | 6| Application linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & 2AM - MA^2 \end{array} \right.$$

Montrer que f est une application linéaire.

Pistes de réflexion

- On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

Exercice| [2916] | 7| Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b+c}{2}J \end{array} \right.$

où $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer l'image par f de la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour f ?

(3). Déterminer une base du noyau de f. Donner alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire le rang de f.

(4). On rappelle que la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a). Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = \{f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\}$.

(b). En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). On pourra montrer que $f(M_1) = (0)$, ce qui assure le fait que $M_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(3). On déterminera les éléments du noyau en traduisant sous forme d'un système les conditions pour que l'image par f d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit nulle. On s'assurera que la famille génératrice ainsi obtenue est libre, pour en déduire une base et la dimension du noyau de f, et par suite, par le théorème du rang, en déduire le rang de f.

(4). (a). La non-liberté de la famille $\mathcal{F}$ viendra du fait que certains vecteurs la composant sont combinaison linéaire d'autres.

(b). On exploitera les relations de dépendance entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et exploiter son caractère générateur de $\mathrm{Im}(f)$ et le fait que l'on connaît la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice| [2917] | 8| Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & M + (a+d)\mathrm{I}_2 \end{array} \right.$.

où I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

(3). On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall M \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}),\ f(M) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). On commencera par déterminer le noyau de f en traduisant sous forme d'un système portant sur les coefficients d'une matrice M quelconque le fait que son image par f doit être nulle. Par la suite, on mobilisera le théorème du rang pour obtenir la dimension de l'image, et chercher une base de son image.

(3). On déterminer l'image par f d'une matrice diagonale quelconque pour montrer qu'elle est encore diagonale.