Manipuler les définitions

Exercice| [3389] | 1| Déterminer un noyau et une image

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et l'échelonnement en lignes suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ -1 & 2 & 1 & -1 & \dots \\ 2 & 1 & 3 & 2 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \dots \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}\right)$$

(1). Résoudre le système linéaire homogène de représentation matricielle $(A|0)$.

(2). Déduire de ce qui précède le noyau de A.

(3). Résoudre le système de représentation matricielle $(A|B)$ où $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour B ?

(4). En utilisant l'échelonnement ci-dessus, montrer que :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ -5b_1 + b_2 + 3b_3 = 0 \right\}$$

Pistes de réflexion

(1). On résout le système par échelonnement en lignes.

(2). On utilise la définition du noyau d'une matrice que l'on traduit sous la forme de la résolution d'un système, en l'occurence celui que l'on vient de résoudre.

(3). On résout le système proposé, pour s'apercevoir qu'il n'est pas compatible, ce qui signfie que la matrice colonne B n'appartient pas à l'image de A.

(4). On résout le système de représentation matricielle $(A|B)$ pour déterminer des conditions sur les coefficients de B pour que ce dernier appartienne à l'image de A.

Exercice| [2122] | 2| Déterminer un noyau et une image

(1). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a). Est-ce que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A)$? Et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$? Et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(b). Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(c). Déterminer le noyau et l'image de la matrice A.

(2). On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a). Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B)$.

(b). Calculer $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c). Déterminer le noyau et l'image de B.

(3). On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a). Montrer que $\mathrm{Ker}\,(C) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b). Déterminer l'image de la matrice C.

(4). On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a). Calculer $D \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comment interprêter ce résultat ?

(b). Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(D)$. En est-il de même de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(c). Déterminer le noyau et l'image de D.

Pistes de réflexion

(1). (a). En utilisant la définition du noyau, pour que $X_1 \in \mathrm{Ker}\,(A)$, on doit avoir $AX_1 = (0)$.

(b). De la relation $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenue, on en déduit par la définition de $\mathrm{Im}\,(A)$ que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Im}\,(A)$.

(c). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(A|0)$

pour obtenir le noyau de A, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(A|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(A)$.

(2). (a). On calculera AX_1 et on vérifiera que ce produit est nul.

(b). Les deux produits matriciels à effectuer devront s'interpréter en termes « d'antécédents » pour montrer que les deux matrices colonnes proposées appartiennent à l'image de B en revenant à la définition de l'image de B.

(c). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(B|0)$ pour obtenir le noyau de B, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(B|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(B)$.

(3). (a). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(C|0)$ pour obtenir le noyau de C.

(b). Il s'agira de déterminer les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(C|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(B)$.

(4). (a). Il est probable que le produit matriciel demandé soit nul...

(b). On cherche les antécédents de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ par $f : X \longmapsto DX$. Si on en trouve, ce vecteur appartient à $\mathrm{Im}\,(D)$, sinon...

(c). Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(D|0)$ pour obtenir le noyau de D, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(D|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(D)$.

Description du noyau d'une matrice

Exercice| [5222] | 3| Noyau et combinaison de colonnes

Pour chacune des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminer une combinaison linéaire nulle des colonnes, puis donner un vecteur du noyau de cette dernière.

Matrice A_1 : $\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$	Relation entre C_1, C_2 et C_3	Élément de $\mathrm{Ker}\,(A_1)$
Matrice A_2 : $\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&3&3\end{pmatrix}$	Relation entre C_1, C_2 et C_3	Élément de $\mathrm{Ker}\,(A_2)$
Matrice A_3 : $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$	Relation entre C_1, C_2 et C_3	Élément de $\mathrm{Ker}\,(A_3)$
Matrice A_4 : $\begin{pmatrix}11&-5&5\\-5&3&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}$	Relation entre C_1, C_2 et C_3	Élément de $\mathrm{Ker}\,(A_4)$
Matrice A_5 : $\begin{pmatrix}2&1&0\\2&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$	Relation entre C_1, C_2 et C_3	Élément de $\mathrm{Ker}\,(A_5)$
Matrice A_6 : $\begin{pmatrix}0&3&0\\3&-3&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	Relation entre C_1, C_2 et C_3	Élément de $\mathrm{Ker}\,(A_6)$

Pistes de réflexion

Pour chacune de ces matrices :
- On essaiera d'obtenir une relation de dépendance entre les trois colonnes de la matrice.
- Une fois obtenue, les coefficients de cette combinaison linéaire donnent un élément du noyau.

Exercice| [5223] | 4| Noyau d'une matrice

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&1&0&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$.

(1). Déterminer le rang de la matrice A.

(2). Montrer que le noyau de A est engendré par deux matrices colonnes que l'on déterminera.

(3). En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

Pistes de réflexion

(1). Un échelonnement en lignes donnera le rang de A.

(2). On exploitera l'échelonnement précédent pour récuperer une famille génératrice du noyau.

(3). Il restera à en étudier la liberté pour obtenir une base du noyau.

Exercice| [5224] | 5| Base du noyau d'une matrice

Montrer que le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une droite vectorielle que l'on identifiera.

Pistes de réflexion

- On déterminera les éléments du noyau par résolution d'un système linéaire.
- Il restera à traduire les solutions obtenues pour obtenir une base du noyau de A.

Description de l'image d'une matrice

Exercice| [5225] | 6| Famille génératrice de l'image d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que la famille formées par les colonnes de la matrice A est une famille liée.

(2). Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les quatre colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 de A.

(3). En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agira de traduire cela par une recherche sur le rang de la matrice A.

(2). On cherchera à obtenir dans un premier temps une relation de dépendance entre les colonnes pour réduire la famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(A)$.

(3). On remarquera que la question précédente est une autre formulation de « chercher une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Exercice| [5226] | 7| Base de l'image d'une matrice

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). On considère une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. À quelle(s) condition(s) sur B le système linéaire de représentation matricielle $(A|B)$ admet-il des solutions ?

(2). Déduire de ce qui précède une description de $\mathrm{Im}\,(A)$ à l'aide d'équations.

(3). Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A)$ est une droite vectorielle que l'on identifiera.

(4). Montrer que la famille de matrices colonnes formée par les colonnes de A est une famille liée, puis en déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agira d'échelonner ce systée jusqu'à faire apparaître les équations de compatibilité de ce dernier, s'il y en a.

(2). La recherche des éléments de $\mathrm{Im}\,(A)$ consiste justement en la résolution du système précédent.

(3). On exploitera les calculs précédents pour obtenir rapidement une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

(4). On cherchera une relation de dépendance entre les matrices colonnes de la matrice A, en exploitant au mieux les calculs précédents ou en réfléchissant sur la dimension de $\mathrm{Im}\,(A)$ vu comme sous-espace engendré par les colonnes de A.