Bases de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$

Exercice| [5207] | 1| Bases de sous-espaces vectoriels

On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :
- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$
- $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = z + t\}$
- $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y = z = t\}$

On admet que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer pour chacun d'entre eux, sa dimension et préciser une base.

Pistes de réflexion

- On exploitera la définition de chacun de ces trois espaces qui sont donnés par des équations pour obtenir une base pour en obtenir un famille génératrice.
- On s'assurera ensuite du caractère libre de cette dernière.
- La dimension d'un espace est le nombre de vecteurs d'une de ses bases.

Exercice| [5208] | 2| Complétion de bases

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
(2). Déterminer une base et la dimension de F.
(3). Compléter la base de F obtenue à la question précdente en une base de $\mathbb{R}^4$.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera en particulier à la stabilité de F par combinaison linéaire.
(2). On exploitera la définition de chacun de ces trois espaces qui sont donnés par des équations pour obtenir une base pour en obtenir un famille génératrice et on s'assurera ensuite du caractère libre de cette dernière.
(3). On complètera cette famille à l'aide de vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on s'assurera ensuite du caractère base de la famille construite.

Exercice| [5210] | 3| Intersection de sous-espaces

Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$.
On considère les deux sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^3$ donnés par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y + z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

(1). Monter que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F.
(2). La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
(3). A-t-on $u_3 \in F$? $u_3 \in G$?
(4). Donner une base de $F \cap G$.
(5). Soit $u_4 = (-1, 7, 5)$. Est-ce que $u_4 \in F$? $u_4 \in G$?

Pistes de réflexion

(1). On pourra essayer de trouver une famille gén'eratrice de F pour obtenir le caractère sous-espace vectoriel, dont on montrera ensuite le caractère base.
(2). On pourra s'intéresser au rang de la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique.
(3). On vérifiera que le vecteur proposé satisfait à la définition d'être dans F ou dans G.
(4). On déterminera un ensemble de conditions permettant de décrire les éléments communs à F et G pour obtenir un description de $F \cap G$.
(5). On vérifiera que le vecteur proposé satisfait à la définition d'être dans F ou dans G.

Manipuler les familles de vecteurs

Exercice| [5209] | 4| Dimension d'un espace vectoriel

Dans tout cet exercice, a désigne un réel et F_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $u_1 = (1, 1, a)$, $u_2 = (1, a, 1)$ et $u_3 = (a, 1, 1)$.
Déterminer en fonction de a, la dimension de F_a.

Pistes de réflexion

- On procèdera à une discussion du caractère libre de la famille engendrant F en fonction de a, à partir d'un échelonnement de la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique.

Exercice| [5211] | 5| Descriptions de sous-espaces vectoriels

On considère $F = \text{Vect}(a, b, c, d)$ où $a = (2, -1, -1)$, $b = (-1, 2, 3)$, $c = (1, 4, 7)$ et $d = (1, 1, 2)$.

(1). Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
(2). Montrer que (a, b) est une base de E.
(3). Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant F.

Pistes de réflexion

(1). La réponse est immédiate compte-tenu du nombre de vecteurs de cette famille.
(2). La réponse est immédiate compte-tenu du nombre de vecteurs de cette famille.
(3). On traduira l'appartenance d'un vecteur à F à l'aide d'équations de compatibilité écrites à partir d'un système permettanat de traduire le fait que l'on dispose d'une famille génératrice de F.

Autres espaces

Exercice| [5212] | 6| Base et dimension d'un sous-espace

On considère F le sous-ensembe de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par :

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\, P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)\, X + \mu X^2,\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Déterminer une base de F.

Pistes de réflexion

(1). On pourra observer le mode de construction de F pour en donner directement une famille génératrice et donc...

(2). Il restera à montrer que la famille obtenue précédemment est une base de F.

Exercice| [5213] | 7| Base et dimension d'un sous-espace

On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\, P(2) = 0\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Donner une base de F et en déduire sa dimension.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera en particulier à la stabilité de F par combinaison linéaire.

(2). On commencera par chercher une famille génératrice de F à partir de la particularité des éléments de F.