Sous-espaces de $\mathbb{R}^n$

Exercice| [4889] | 1| Sous-espace de $\mathbb{R}^3$

On considère $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, -2, 1)$ et $v_3 = (2, 0, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On considère le sous-ensemble H de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ x = \lambda_1 (v_2 - v_1) + \lambda_2 (v_3 - v_1)\}$$

(1). Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2). Donner une famille génératrice de H.

(3). Qu'en déduire pour H ?

Pistes de réflexion

(1). On commencera par vérifier que H est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, et pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élément fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de H.

(2). La famille génératrice de H est implicite dans la définition de H.

(3). Disposant d'une famille génératrice, il nous suffira d'étudier sa liberté.

Exercice| [5081] | 2| Sous-espace de $\mathbb{R}^3$

Dans cet exercice u et v désignent deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non nuls et non colinéaires.
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x + y - z)u + (2x - y - 2z)v = \overrightarrow{0}\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pistes de réflexion

- On s'assurera qu'il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui contient le vecteur nul.
- On montrera ensuite la stabilité de F par combinaison linéaire de deux éléments de F en utilisant la relation caractérisant les éléments de F.

Exercice| [3474] | 3| Sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y + 3z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\}$$

(1). Le vecteur $(-1, 2, 1, -2)$ appartient-il à F ?

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Pistes de réflexion

(1). On s'assure que le vecteur proposé satisfait les conditions d'appartenance à F.

(2). On s'assurera qu'il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur nul, puis on montrera ensuite la stabilité de F par combinaison linéaire de deux éléments de F en utilisant la relation caractérisant les éléments de F.

(3). On utilisera la caractérisation des éléments de F pour obtenir un système linéaire que l'on exploitera pour décrire les éléments de F comme combinaison linéaire de vecteurs de F.

Exercice| [2003] | 4| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z - t = 0 \text{ et } x + y - z + 2t = 0\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de F.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera qu'il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ qui contient le vecteur nul, puis on montrera ensuite la stabilité de F par combinaison linéaire de deux éléments de F en utilisant la relation caractérisant les éléments de F.

(2). On utilisera la caractérisation des éléments de F pour obtenir un système linéaire que l'on exploitera pour décrire les éléments de F comme combinaison linéaire de vecteurs de F.

Exercice| [2182] | 5| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0\}$.

(1). Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de H.

Pistes de réflexion

(1). On s'assurera qu'il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ qui contient le vecteur nul, puis on montrera ensuite la stabilité de F par combinaison linéaire de deux éléments de F en utilisant la relation caractérisant les éléments de F.

(2). On utilisera la caractérisation des éléments de F pour obtenir un système linéaire que l'on exploitera pour décrire les éléments de F comme combinaison linéaire de vecteurs de F.

Sous-espaces de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice| [3623] | 6| Sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pistes de réflexion

- On commencera par vérifier que F est bien un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire la matrice nulle.
- Pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de F.

Exercice| [3475] | 7| Sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(1). Donner un exemple de matrice appartenant à F.

(2). La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à F ? Et la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$?

(3). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(4). Montrer que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Que retrouve-t-on pour F ?

(5). Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre.
Qu'en déduire pour F ?

Pistes de réflexion

(1). On se contentera de choisir une valeur au couple (a,b) et de construire une matrice à partir de ce dernier à partir du « modèle » des éléments de F.

(2). On fait le travail inverse ici : on essaie de décomposer les coefficients des matrices proposées de sorte qu'ils s'obtiennent à partir d'un couple de valeurs qu'il convient de déterminer et sur le mode de construction des éléments de F.

(3). On commencera par vérifier que F est bien un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de F.

(4). Il suffit de décomposer la forme des éléments de F pour les voir comme combinaison linéaire de deux matrices, qui donneront donc la famille génératrice proposée.

(5). Le fait qu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs simplifie grandement l'obtention de son caractère libre.

Exercice| [3419] | 8| Famille de matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On considère les matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E = \mathrm{Vect}\,(I, J, K, L)$.

(1). Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(2). Montrer que la famille (I, J, K, L) est une famille libre de E.

(3). En déduire la dimension de E.

Pistes de réflexion

(1). Le fait que E soit en soit engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ lui confère son caractère sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(2). La liberté de la famille s'obtient à partir de l'étude d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille.

(3). On dispose d'une famille libre et génératrice de E, donc d'une base...

Exercice| [4896] | 9| Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On désigne par F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ (A - \mathrm{I}_2)\, M = M\, (A - \mathrm{I}_2)\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Vérifier que I_2 appartiennent à F.

(3). Montrer alors que $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

(4). Déterminer alors une base de F.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de s'assurer en particulier de F est stable par combinaison linéaire.

(2). Il suffit de vérifier que I_2 satisfait la condition pour être un élément de F.

(3). On prendra une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque et on traduira sous forme d'un système la condition que doit vérifier cette dernière pour appartenir à F.

(4). La question précédente donne une famille génératrice de F. Il reste à s'assurer que cette dernière est libre pour avoir une base de F.

Familles de vecteurs

Exercice| [2974] | 10| Liberté d'une famille

La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_3)$ avec $u_1 = (3, 0, 3, -1)$, $u_2 = (-1, 2, -3, 0)$ et $u_3 = (2, 1, 5, 1)$ est-elle libre ?

Pistes de réflexion

- On utilise la représentation matricielle de cette famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ pour en étudier la liberté.
- Par théorème, cette famille sera une base si, et seulement si, sa matrice est de rang 3 puisqu'il s'agit d'une famille de 3 vecteurs.

Exercice| [3223] | 11| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2, -1, 1, 2)\,, \quad u_2 = (1, 2, 1, 1)\,, \quad u_3 = (-1, -7, -2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0, -10, -2, 0)$$

Pistes de réflexion

- On s'assure du caractère lié de la famille en s'intéressant au rang de la matrice de la famille et en le comparant au nombre de vecteurs de cette dernière.
- Pour la relation de dépendance, on exploitera l'échelonnement précédent pour obtenir cette dernière.

Exercice| [2329] | 12| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :
$u_1 = (2, -2, 3)$, $u_2 = (-1, -1, 2)$, $u_3 = (3, -1, 2)$ et $u_4 = (-2, -2, 3)$.

(1). Sans calculs , expliquer pourquoi la famille $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

(2). Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(3). Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatre vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4, puis déterminer quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = u$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra utiliser un théorème qui donne le nombre maximal de vecteurs pour une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(2). On pourra mobiliser la caractérisation des familles génératrices à l'aide de leur représentation matricielle, ou essayer de décomposer tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

(3). On sera amené à reprendre les calculs entrepris précdemment pour obtenir la décomposition recherchée.