Utilisation de suites géométriques

Exercice| [5156] | 1

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous, étudier la convergence de cette dernière et donner le cas échéant la valeur de sa limite.

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 6$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - \frac{1}{\mathrm{e}^n}$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^n}$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3(-4)^n + 2^n$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n - 1}{3^n - 1}$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites :
- on remarquera que le terme général contient un ou plusieurs termes de la forme q^n ;
- on explicitera la limite de chacun de ses termes en fonction de la valeur de q ;
- on concluera quant à la convergence de la suite en levant les formes indéterminées.

Exercice| [5163] | 2| Limite de suites

(1). Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - \mathrm{e}^{\,n}$

(2). Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n - \mathrm{e}^{\,n}$

(3). Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \mathrm{e}^{\,2n} - 9^n$

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à une factorisation pour faire apparaître une suite géométrique. . .

(2). On procèdera à une factorisation pour faire apparaître une suite géométrique. . .

(3). On procèdera à une factorisation pour faire apparaître une suite géométrique. . .

Levées d'indéterminées | Croissances comparées

Exercice| [5162] | 3| Calculs de limites

Pour chacune des suites $(u_n)_n$ données ci-après déterminer leur limite.

Expression de u_n	Transformation de u_n	Limite de u_n
$\mathrm{e}^{\,n} - n^2 + \mathrm{e}^{\,-n}$		
$(\ln(n))^3 - 2\sqrt{n}$		
$n^2 - n + 1$		
$\mathrm{e}^{\,n} - n + 2$		
$\ln(n) - n$		
$\mathrm{e}^{\,n} - 2n$		
$(\ln(n) + n)\,\mathrm{e}^{\,-n}$		
$(n^2 - \ln(n))\,\mathrm{e}^{\,-2n}$		
$(\mathrm{e}^{\,n} + n)\,\mathrm{e}^{\,-2n}$		
$\dfrac{n^2 - n + 1}{\mathrm{e}^{\,n} - n + 2}$		
$\dfrac{\ln(n) - n}{\mathrm{e}^{\,n} - 2n}$		
$\dfrac{n^3 - n}{\mathrm{e}^{\,-n} + n}$		

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites :

- On identifiera la nature de la forme indéterminée rencontrée ;
- On repèrera le terme prépondérant de l'expression pour procéder à une factorisation
- On mobilisera les résultats sur les croissances comparées pour déterminer la limite demandée.

Utilisation des théorèmes de convergence

Exercice| [5157] | 4| Utilisation d'une minoration

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \mathrm{e}^{u_n} \end{cases}$

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 1$.

(2). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n$.

(3). Qu'en conclure pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pistes de réflexion

(1). On utilisera l'inégalité portant sur la fonction exponentielle et sa tangente en 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq x+1$.

(2). La différence $u_{n+1} - u_n$ fait penser à sommer ces inégalités de sorte à faire apparaître un téléscopage de termes pour obtenir la relation attendue.

(3). On moblisera le théorème de divergence par minoration pour conclure.

Exercice| [5158] | 5| Utilisation du théorème d'encadrement

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^3} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(2). Qu'en conclure pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

Pistes de réflexion

(1). On remarquera que si $k \in [\![1;n]\!]$, alors $k^2 \in [1;n^2]$, ce qui permettra par sommation de ces inégalités d'obtenir l'encadrement souhaité pour u_n.

(2). On mobilisera le théorème de convergence par encadrement pour conclure.

Exercice| [5159] | 6| Utilisation du théorème d'encadrement

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n & \in & [0;1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n & \in & [0;1] \\ u_n \times v_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 \end{cases}$

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \times v_n \leq v_n \leq 1$

(2). En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3). En est-il de même pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Pistes de réflexion

(1). On exploitera le fait que les suites sont à valeurs dans $[0;1]$ en se souvenant que multiplier une quantité positive par un nombre inférieur à 1 en valeur absolue donne un résultat plus petit que la quantité précédente.

(2). On mobilisera le théoème d'encadrement pour conclure.

(3). Le rôle des deux suites est clairement symétrique.

Exercice| [5160] | 7| Utilisation du théorème d'encadrement

Dans tout cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

(1). Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

(2). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{na}{n+a} \leq \ln(u_n) \leq a$

(3). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à deux études de fonctions pour obtenir l'inégalité de gauche, puis celle de droite.

(2). On commence par expliciter $\ln(u_n)$ et on utilisera l'inégalité précédente pour obtenir l'encadrement voulu.

(3). On applique le théorème d'encadrement pour obtenir la limite de la suite de terme général $\ln(u_n)$, puis on composera par la fonction exponentielle pour revenir à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice| [5161] | 8| Utilisation d'une minoration

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

(1). Justifier que : $\forall k \in [\![n+1;2n]\!],\ \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

(2). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} - u_n \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

(3). En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1). On utilisera la croissance de la fonction racine carrée et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2). On commencera par expliciter la différence $u_{2n} - u_n$, et on sommera les inégalités précédentes dont on explicitera les termes minorants et majorants en fonction de n.

(3). On utilisera le fait que $u_n \geq 0$ pour remarquer que le terme général de la suite extraite d'indice pair de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par celui d'une suite qui diverge vers $+\infty$.