Manipuler les suites arithmétiques et géométriques

Exercice| [4813] | 1| Suites arithmétiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r, de premier terme u_0 et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(1). On donne $u_0 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_4.
(2). On donne $u_2 = 1$ et $r = 2$. Calculer u_4.
(3). On donne $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$. Calculer r.
(4). On donne $u_0 = 3$ et $u_5 = -1$. Calculer S_5.
(5). On donne $S_3 = 10$ et $u_4 = -3$. Calculer S_2.
(6). On donne $S_4 = 12$ et $S_5 = 16$. Calculer u_5.

Pistes de réflexion

(1). On donnera l'expression de u_n en fonction de n pour calculer u_4.
(2). On donnera la relation entre les termes d'indices différents.
(3). La différence entre deux termes successifs donne la valeur de la raison. . .
(4). On dispose d'une formule de calcul directe pour S_5 dans ce cas de figure.
(5). On commence par calculer S_4 pour ensuite trouver u_0 et r à l'aide u_4, pour ensuite avoir u_2 et finalement S_2.
(6). On a simplement que $S_5 = S_4 + u_5$.

Exercice| [4814] | 2| Suites géométriques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométriique de raison q, de premier terme u_0 et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(1). On donne $u_0 = 3$ et $q = 4$. Calculer u_3.
(2). On donne $u_2 = -4$ et $q = 3$. Calculer u_6.
(3). On donne $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$. Calculer q.
(4). On donne $u_0 = 1$ et $q = 2$. Calculer S_4.
(5). On donne $u_0 = 2$ et $u_1 = 8$. Calculer S_6.
(6). On donne $S_4 = 12$ et $S_5 = 7$. Calculer u_5.

Pistes de réflexion

(1). On utilise la formule donnant le terme d'indice n à partir de u_0 pour une suite géométrique.
(2). On utilise la formule reliant le terme d'indice p et d'indice q pour une suite géométrique.
(3). La raison d'une suite géométrique est égale au quotient de deux termes successifs.
(4). On appliquera directement la formule de calcul donnant la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique.
(5). On commencera par chercher la raison de cette suite géomémtrique avant d'appliquer directement la formule de calcul donnant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.
(6). On remarquera simplement que $S_5 = S_4 + u_5$.

Reconnaître et utiliser des suites arithmétiques et géométriques

Exercice| [0684] | 3| Terme général d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} - 2^n$.
Est-elle arithmétique ? géométrique ? constante ?

Pistes de réflexion

- L'énoncé suggère d'étudier $u_{n+1} - u_n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou de trouver une relation entre u_{n+1} et u_n de sorte à faire apparaître les relations caractéristiques pour les suites arithmétiques et géométriques.
- On pourra aussi essayer de factoriser par la plus petite puissance de 2 pour faire apparaître le terme général d'une suite . . .

Exercice| [2438] | 4| Terme général d'une suite

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A_n = \dfrac{(9^{n+1} - 9^n)^2}{(3^{n+1} - 3^n)^2}$.

(1). Calculer A_0 et A_1. Que peut-on remarquer ?
(2). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 9A_n$.
(3). Exprimer A_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Pistes de réflexion

(1). Évaluer l'expression pour $n = 0$ et $n = 1$. Essayer ensuite de trouver une relation entre A_0 et A_1.
(2). Factoriser par 9 et 3 dans l'expression de A_{n+1} pour faire apparaître A_n.
(3). Factoriser par la plus petite puissance de 9 dans le carré du numérateur, puis utiliser les règles opératoires sur les puissances, et faire de même au dénominateur avec la plus petite puissance de 3 avant de simplifier le quotient ainsi transformé.

Exercice| [0683] | 5| Suites homographiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

(1). Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
(2). En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera à la différence $v_{n+1} - v_n$ qui se doit d'être constante ici.

(2). La nature de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit pour en avoir une expression en fonction de n et permettra d'obtenir celle de u_n en fonction de n en utilisant la relation entre v_n et u_n.

Exercice| [3095] | 6| Suites homographiques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} \end{cases}$$

et on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

(1). Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

(2). En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéressera au quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ qui se doit d'être constante ici, ou on essaiera de trouver un lien direct entre v_{n+1} et v_n.

(2). La nature de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit pour en avoir une expression en fonction de n et permettra d'obtenir celle de u_n en fonction de n en utilisant la relation entre v_n et u_n.

Suites arithmético-géométriques

Exercice| [5154] | 7| Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression du terme général en fonction de n.

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Équation à résoudre | Résolution
$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$	

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ldots$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : ... | $v_0 = \ldots$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ldots$

Expression de u_n

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Équation à résoudre | Résolution
$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$	

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ldots$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : ... | $v_0 = \ldots$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ldots$

Expression de u_n

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Équation à résoudre | Résolution
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 1 \end{cases}$	

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ldots$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : ... | $v_0 = \ldots$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ldots$

Expression de u_n

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_{n+1} = au_n + b$:

- On cherchera la solution ℓ de l'équation $x = ax + b$;
- On introduira une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de u_n et ℓ qui sera une suite géométrique ;
- On exprimera v_n en fonction de n, puis on explicitera u_n en fonction de n à partir de la relation qui lie v_n et u_n.

Exercice| [0589] | 8| Suite arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Pistes de réflexion

- On reconnaîtra une suite arithmético-géométrique dont on pourra expliciter son terme général en fonction de n, et constater que ce dernier est constant.
- On pourra calculer les premiers termes, conjecturer un résultat pour u_n que l'on établira ensuite par récurrence.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice| [5155] | 9| Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression du terme général en fonction de n.

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de u_n | $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ldots$

Système vérifié par (λ, μ)

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ldots$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 3u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de u_n | $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ldots$

Système vérifié par (λ, μ)

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ldots$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_1 & = & -1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} & = & \frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n) \end{array}\right.$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de $u_n \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Système vérifié par (λ,μ)

$\left\{\right.$

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_1 & = & 4 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} & = & 4u_{n+1}-u_n \end{array}\right.$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de $u_n \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Système vérifié par (λ,μ)

$\left\{\right.$

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données :
- On explicite l'équation caractéristique de la suite et on la résout ;
- À partir des solutions précédemment obtenues, on donne la forme u_n en fonction de n et de deux paramètres ;
- On détermine les deux paramètres en utilisant les valeurs u_0 et u_1 données en résolvant un système.
- On explicite alors complètement u_n en fonction de n.