Sens de variation d'une suite

Exercice| [4815] | 1| Sens de variation d'une suite

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - 10n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{3^n}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + \dfrac{1}{n}$

Pistes de réflexion

- On explicitera la différence $u_{n+1} - u_n$, dont on étudiera par la suite le signe.
- Le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ donnera le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice| [3281] | 2| Sens de variation d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

- On explicitera la différence $u_{n+1} - u_n$, dont on étudiera par la suite le signe.
- Le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ donnera le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice| [5164] | 3| Sens de variation d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n^2 - 3u_n + 1 \end{cases}$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

- On explicitera la différence $u_{n+1} - u_n$, dont on étudiera par la suite le signe.
- Le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ donnera le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice| [5165] | 4| Sens de variation d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Pistes de réflexion

- On explicitera la différence $u_{n+1} - u_n$, dont on étudiera par la suite le signe.
- Le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ donnera le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice| [5166] | 5| Sens de variation d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2 \mathrm{e}^{-n}$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Pistes de réflexion

- On explicitera le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, que l'on comparera à 1
- Une fois que l'on se sera assuré du signe de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, on en déduira le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$ à l'aide de ce quotient.

Exercice| [5167] | 6| Sens de variation d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^n \mathrm{e}^{-n} \end{cases}$

(1). Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$

(2). Conclure quant au sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

(1). On explicitera la propriété de récurrence à établir, et on procèdera de façon structurée pour effectuer le raisonnement par récurrence. La croissance de la fonction exponentielle sera la clé de l'hérédité.

(2). Les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se déduisent clairement de la question précédente.

Suites adjacentes

Exercice| [5168] | 7| Suites adjacentes

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dont les termes généraux sont $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n} + u_n$.

(1). Montrer qua la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

(2). Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.

(3). Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont-elles adjacentes ?

Pistes de réflexion

(1). On explictera la différence $u_{n+1} - u_n$ dont on étudiera le signe pour obtenir les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2). On explictera la différence $v_{n+1} - v_n$ dont on étudiera le signe pour obtenir les variations de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

(3). Il reste à s'assurer que la diffénce $v_n - u_n$ converge vers 0.

Raisonnement par récurrence

Exercice| [3091] | 8| Établir une formule par récurrence

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations : $\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_1 &= -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= 4\,(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n-1}\,(1 - 3n)$

Pistes de réflexion

- On explicitera la propriété de récurrence à établir, et on procèdera de façon structurée pour effectuer le raisonnement par récurrence.
- Il s'agira d'une récurrence double puisque le mode de construction de la suite demande la connaissance de deux termes successifs pour avoir le suivant.

Exercice| [0588] | 9| Établir une minoration par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 &= 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} &= \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.

Pistes de réflexion

- On explicitera la propriété de récurrence à établir, et on procèdera de façon structurée pour effectuer le raisonnement par récurrence.
- L'initialisation ne pose pas vraiment de difficulté.
- Pour la partie hérédité, il s'agira d'utiliser a bon escient la croissance de la fonction carrée, en s'assurant en fait de la positivité des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, ce qui conduit à écrire une propriété de récurrence qui en tienne compte.

Exercice| [3271] | 10| Établir une inégalité par récurrence | Variation d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \dfrac{3u_n - 4}{4} \end{cases}$.

(1). Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq -4$.

(2). Étudier alors le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

(1). On explicitera la propriété de récurrence à établir, et on procèdera de façon structurée pour effectuer le raisonnement par récurrence. On construira pas à pas la minoration de u_{n+1} à partir de $u_n \geq -4$ à l'aide des opérations liant u_{n+1} et u_n.

(2). La question précédente permet de déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour en déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$