Résolution de systèmes

Exercice| [4752] | 1| Écriture de solutions

On donne ci-après des matrices augmentées équivalentes en lignes à celles d'un système linéaire $\mathcal{S}$ initialement donné.

Lorsque c'est possible, donner le rang du système puis déterminer les solutions du système $\mathcal{S}$, et sinon, poursuivre les opérations élémentaires nécessaires pour pouvoir le faire.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pistes de réflexion

- On vérifie que l'on a une forme pseudo-triangulaire supérieure. . .puis que tous les pivots sont égaux à 1. . .puis que ce sont les seuls éléments non nuls dans leur colonne pour avoir une forme échelonnée réduite.
- Le rang quant à lui correspond au nombre de pivots non nuls.
- On explicite ensuite les solutions lorsque l'on a un système échelonné réduit.

Exercice| [4751] | 2| Systèmes 2×2

Résoudre les systèmes linéaires 2×2 ci-contre.

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x - y = 0 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- On écrit la représentation matricielle de ces deux systèmes. . .
- . . .que l'on échelonne de sorte à obtenir leur forme échelonneée réduite en lignes.

Exercice| [4748] | 3| Systèmes 3×3

Résoudre les systèmes d'inconnues x, y et z dont on donne ci-après leurs matrices augmentées associées :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 2 & -2 & 2 & -12 \\ -1 & 3 & -2 & 11 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Pistes de réflexion

- La représentation matricielle de ces deux systèmes étant déjà donnée . . .
- . . .il s'agit dont de l'échelonner de sorte à obtenir leur forme échelonneée réduite en lignes.

Exercice| [4753] | 4| Systèmes linéaires rectangulaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\mathcal{S}_1 \ : \ \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ -2x - 2y + z = 2 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 \ : \ \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 1 \\ x - y - z - t = -1 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- On écrit la représentation matricielle de ces deux systèmes. . .
- . . .que l'on échelonne de sorte à obtenir leur forme échelonneée réduite en lignes.

Systèmes à paramètres

Exercice| [4749] | 5| Système 2×2 à paramètres

Dans tout ce qui suit m désigne un réel quelconque.

Discuter en fonction de m de la compatibilité du système $\mathcal{S}$ suivant, et le cas échéant, en donner les solutions.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}.$$

Pistes de réflexion

- On cherche à procéder un échelonnement réduit en lignes, en s'intérressant aux conditions de réalisation des opérations élémentaires en fonction de m.
- On pensera à étudier les cas correspondants aux valeurs de m remarquées dans les discussions précédentes.

Exercice| [2147] | 6| Systèmes linéaires

Résoudre, en discutant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, le système ci-contre.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- Utiliser la représentaton matricielle du système.
- Échelonner la matrice augmentée du système et discuter sur la nature des opérations élémentaires effectuées conditionnées par les valeurs de k pour poursuivre l'échelonnement et étudier chacun des cas soulevés.

Exercice| [4750] | 7| Système 3×3 à paramètres

Dans tout ce qui suit m désigne un réel quelconque.

Discuter en fonction de m de la compatibilité du système $\mathcal{S}$ ci-contre, et le cas échéant, en donner les solutions.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- Utiliser la représentaton matricielle du système.
- Échelonner la matrice augmentée du système et discuter sur la nature des opérations élémentaires effectuées conditionnées par les valeurs de k pour poursuivre l'échelonnement et étudier chacun des cas soulevés.

Exercice| [4754] | 8| Système 3×3 à paramètres

Dans ce qui suit, λ désigne un réel quelconque.

(1). Déterminer en fonction de λ du rang du système 3×3 suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (\lambda - 2)x + y + z = 0 \\ x + (\lambda - 2)y + z = 0 \\ x + y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases}$$

(2). Déterminer alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ lorsque $\mathcal{S}$ est de rang 1 ou de rang 2.

Pistes de réflexion

(1). On procède à une recherche du rang par échelonnement de la représentation matricielle du système, en discutant suivant les valeurs de λ du caractère licite de ces opérations, puis on traite les différents cas mis en évidence.

(2). On explicite le système pour les valeurs de λ conduisant à ces deux valeurs de rang, puis on les résout.

Cas se ramenant à un système linéaire

Exercice| [1895] | 9| Système non linéaire

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnues x, y et z réels strictements positifs ci-contre.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- Ce n'est pas un système linéaire, donc on ne peut pas y appliquer l'algorithme de Gauss !
- L'indication $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ doit nous mettre la puce à l'oreille...
- Le problème est de se ramener à un système linéaire, c'est à dire où il y a des sommes et non des produits.
- Et quoi de mieux qu'un logarithme pour transformer un produit en somme !
- On a alors un système linéaire dont les inconnues sont alors...