

**Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points**

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL03 - Définition 1 - Famille libre | Interprétation incluse
- AL03 - Définition 12 - Droites et plans vectoriels de  $\mathbb{R}^n$
- AL03 - Théorème 4 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$

**Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points**

Montrer qu'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3|\mathbb{R}^4$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3|\mathbb{R}^4$  par stabilité par combinaison linéaire

Décrire un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3|\mathbb{R}^4$  à l'aide d'une famille génératrice

**Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points****AL03 | Travailler dans  $\mathbb{R}^n$** 

- Reprise programme précédent

**Exemples de savoir faire à maîtriser**

- Reprise du programme précédent ;

**Programme à venir...**

Calcul matriciel

**Pour la pratique calculatoire****EX. 1 | Réf. 5081**

Dans cet exercice  $u$  et  $v$  désignent deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non nuls et non colinéaires.  
On considère le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y - z)u + (2x - y - 2z)v = \vec{0} \right\}$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**EX. 2 | Réf. 5080**

On considère le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$  défini par :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0 \}$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

**EX. 3 | Réf. 2003**

On considère le sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  défini par :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0 \text{ et } x + y - z + 2t = 0 \}$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Déterminer une famille génératrice de  $F$ .

## EX. 4 | Réf. 3474

On considère le sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y + 3z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\}$$

1. Le vecteur  $(-1, 2, 1, -2)$  appartient-il à  $F$  ?
2. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .
3. Donner une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

## Sur l'ensemble du programme

## EX. 5 | Réf. 2182

On considère  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z = 0\}$ .

1. Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Déterminer une famille génératrice de  $H$ .

## EX. 6 | Réf. 1436

Soit  $(u, v, w)$  une famille libre d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que la famille  $(u + v, u - v, w + u)$  est également libre.
2. La famille  $(u - v, v - w, w - u)$  est-elle libre ?

## EX. 7 | Réf. 1192

Soit  $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 7\beta \end{cases} \right\}$ .

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

## EX. 8 | Réf. 2974

La famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  où  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_3)$  avec  $u_1 = (3, 0, 3, -1)$ ,  $u_2 = (-1, 2, -3, 0)$  et  $u_3 = (2, 1, 5, 1)$  est-elle libre ?

## EX. 9 | Réf. 2329

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_4)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  où :

$$u_1 = (2, -2, 3), u_2 = (-1, -1, 2), u_3 = (3, -1, 2) \text{ et } u_4 = (-2, -2, 3).$$

1. Sans calculs, expliquer pourquoi la famille  $\mathcal{F}$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Soit  $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ .

Justifier que  $u$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatre vecteurs  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ , puis déterminer quatre réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  tels que  $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = u$ .

## EX. 10 | Réf. 2972

On a écrit ci-dessous les matrices de familles  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans chaque cas :

1. identifier  $p$ ,  $n$  et les vecteurs  $(u_1, \dots, u_p)$  de  $\mathcal{F}$ ;
2. étudier le caractère libre de la famille  $\mathcal{F}$ ;
3. étudier le caractère générateur de la famille  $\mathcal{F}$ ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

## EX. 11 | Réf. 3223

Vérifier que la famille  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_4)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2, -1, 1, 2), \quad u_2 = (1, 2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -7, -2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0, -10, -2, 0)$$

## EX. 12 | Réf. 2396

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$  la famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  où :  $u_1 = (1, a, 3)$ ,  $u_2 = (1, 1, a)$ , et  $u_3 = (a, 1, 3)$  où  $a$  étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel  $a$ , la liberté de la famille  $\mathcal{F}$  et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

## EX. 13 | Réf. 2397

On considère la famille  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_4)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  où :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, -2, 3) \quad \text{et} \quad e_4 = (1, 1, 2, -2).$$

1. La famille  $\mathcal{F}$  est-elle libre? Est-elle génératrice de  $\mathbb{R}^4$ ?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour que le vecteur  $u = (1, 1, \alpha, \beta)$  appartienne à  $\text{Vect}(\mathcal{F})$ .

## EX. 14 | Réf. 2970

Le vecteur  $u = (-2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$  appartient-il au sous-espace  $\mathbb{F} = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$  où  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (3, 0, 0, 2)$  et  $v_3 = (-1, 1, -1, 1)$ ?

## EX. 15 | Réf. 2965

On a écrit ci-dessous les matrices de familles de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Dans chaque cas, identifier  $p$ ,  $n$  et les vecteurs  $(u_1, \dots, u_p)$  de  $\mathcal{F}$ , et dire s'il s'agit d'une famille libre ou non.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$