Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL03 - Définition 1 - Famille libre | Interprétation incluse
- AL03 - Définition 12 - Droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$
- AL03 - Théorème 4 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3|\mathbb{R}^4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3|\mathbb{R}^4$ par stabilité par combinaison linéaire

et

Décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3|\mathbb{R}^4$ à l'aide d'une famille génératrice

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AL03 | Travailler dans $\mathbb{R}^n$

- Reprise programme précédent
- Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
- Droites et plans vectoriels
- Classification des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent ;
- Obtenir une relation de dépendance entre des vecteurs liés de $\mathbb{R}^n$
- Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
- Obtenir une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Programme à venir...

Reprise programme

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 5081

Dans cet exercice u et v désignent deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non nuls et non colinéaires.
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y-z)u + (2x-y-2z)v = \overrightarrow{0}\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

EX. 2 | Réf. 5080

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y+z-t=0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

EX. 3 | Réf. 2003

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z - t = 0 \text{ et } x + y - z + 2t = 0\right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.

EX. 4 | Réf. 3474

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y + 3z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\right\}$$

1. Le vecteur $(-1, 2, 1, -2)$ appartient-il à F ?
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Sur l'ensemble du programme

EX. 5 | Réf. 2182

On considère $H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0\right\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une famille génératrice de H.

EX. 6 | Réf. 1436

Soit (u, v, w) une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

1. Montrer que la famille $(u + v, u - v, w + u)$ est également libre.
2. La famille $(u - v, v - w, w - u)$ est-elle libre ?

EX. 7 | Réf. 1192

Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 7\beta \end{array} \right. \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

EX. 8 | Réf. 2974

La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_3)$ avec $u_1 = (3, 0, 3, -1)$, $u_2 = (-1, 2, -3, 0)$ et $u_3 = (2, 1, 5, 1)$ est-elle libre ?

EX. 9 | Réf. 2329

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :

$$u_1 = (2, -2, 3),\ u_2 = (-1, -1, 2),\ u_3 = (3, -1, 2) \text{ et } u_4 = (-2, -2, 3).$$

1. Sans calculs , expliquer pourquoi la famille $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
   Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatre vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4, puis déterminer quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = u$.

EX. 10 | Réf. 2972

On a écrit ci-dessous les matrices de familles $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Dans chaque cas :

1. identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$;
2. étudier le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$;
3. étudier le caractère générateur de la famille $\mathcal{F}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EX. 11 | Réf. 3223

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2, -1, 1, 2)\,, \quad u_2 = (1, 2, 1, 1)\,, \quad u_3 = (-1, -7, -2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0, -10, -2, 0)$$

EX. 12 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 13 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :
$e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 2, 1)$, $e_3 = (1, 0, -2, 3)$ et $e_4 = (1, 1, 2, -2)$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

EX. 14 | Réf. 2970

Le vecteur $u = (-2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ appartient-il au sous-espace $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, 0, 2)$ et $v_3 = (-1, 1, -1, 1)$?

EX. 15 | Réf. 2965

On a écrit ci-dessous les matrices de familles de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Dans chaque cas, identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$, et dire s'il s'agit d'une famille libre ou non.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$