Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL03 - Définition 1 - Famille libre | Interprétation incluse
- AL03 - Définition 12 - Droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$
- AL03 - Théorème 4 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Utiliser le binôme de Newton pour calculer les puissances d'une matrice

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

AL03 - Travailler dans $\mathbb{R}^n$

- Reprise programme précédent

AL04 - Calcul matriciel

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent
- Effectuer une combinaison linéaire de matrices
- Calculer le produit de deux matrices
- Utiliser le binôme de Newton pour calculer les puissances d'une matrice

Programme à venir

Matrices inversibles | Trace et transposition

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [5169] | 1| Puissance de matrices

On considère une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -A$.
Déterminer $(A - 2\mathrm{I}_3)^9$.

Exercice| [5170] | 2| Puissance de matrices

Soient B et C deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} BC &= 2\mathrm{I}_3 \\ BC &= CB \\ B^2 &= C \\ C^2 &= B \end{cases}$

Déterminer $(B + C)^9$.

Exercice| [5171] | 3| Puissance de matrice

A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2\mathrm{I}_3 + N$ où N est telle que $N^3 = (0)$.
Exprimer A^n en fonction de n, I_3 et N.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [2003] | 4| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z - t = 0 \text{ et } x + y - z + 2t = 0\right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de F.

Exercice| [2182] | 5| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère $H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0\right\}$.

(1). Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de H.

Exercice| [1436] | 6| Liberté d'une famille de vecteur

Soit (u, v, w) une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

(1). Montrer que la famille $(u + v, u - v, w + u)$ est également libre.

(2). La famille $(u - v, v - w, w - u)$ est-elle libre ?

Exercice| [3474] | 7| Sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y + 3z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\right\}$$

(1). Le vecteur $(-1, 2, 1, -2)$ appartient-il à F ?

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exercice| [1192] | 8| Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 2\alpha - 5\beta \\ y = -\alpha + 3\beta \\ z = 7\beta \end{cases} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [5081] | 9| Sous-espace de $\mathbb{R}^3$

Dans cet exercice u et v désignent deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non nuls et non colinéaires.
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ (x + y - z)u + (2x - y - 2z)v = \overrightarrow{0} \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice| [5080] | 10| Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ x - y + z - t = 0 \}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice| [5095] | 11| Produit de trois matrices carrées d'ordre 3

Effectuer le produit matriciel QAP où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice| [2974] | 12| Liberté d'une famille

La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_3)$ avec $u_1 = (3, 0, 3, -1)$, $u_2 = (-1, 2, -3, 0)$ et $u_3 = (2, 1, 5, 1)$ est-elle libre ?

Exercice| [2329] | 13| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :
$u_1 = (2, -2, 3)$, $u_2 = (-1, -1, 2)$, $u_3 = (3, -1, 2)$ et $u_4 = (-2, -2, 3)$.

(1). Sans calculs , expliquer pourquoi la famille $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

(2). Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(3). Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatre vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4, puis déterminer quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = u$.

Exercice| [2972] | 14| Liberté et caractère générateur d'une famille

On a écrit ci-dessous les matrices de familles $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Dans chaque cas :

(1). identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$;

(2). étudier le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$;

(3). étudier le caractère générateur de la famille $\mathcal{F}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice| [3223] | 15| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2, -1, 1, 2), \quad u_2 = (1, 2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -7, -2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0, -10, -2, 0)$$