Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- PR08 - Théorème 1 - Espérance et variance d'une loi géométrique
- PR08 - Théorème 3 - Espérance et variance d'une loi de Poisson
- PR08 - Théorème 4 - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Utiliser le théorème du transfert pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

PR06 | Probabilité sur un univers dénombrable

- Notion d'univers fini et dénombrable
- Probabilité sur un unviers dénombrable
- Opérations sur les événements et les probabilités
- Probabilités conditionnelles et formule de probabilités composées ;
- Système complet d'événements et formule des probabilités totales
- Indépendance deux à deux ou mutuelle pour des familles d'événements

PR07 | Variables aléatoires discrètes

- Loi d'une variable aléatoire discrète et système complet d'événements associés
- Fonction de répartition et propriétés caractéristiques
- Image d'une variable aléatoire par une application
- Espérance d'une variable aléatoire discrète
- Linéarité, croissance et positivité de l'espérance
- Théorème du transfert
- Variance et bilinéarité
- Variables aléatoires indépendantes
- Notion de couple de variables aléatoires discrètes

PR08 | Lois usuelles discrètes

- Loi géométrique
- Caractérisation des variables aléatoires discrètes sans mémoire
- Loi de Poisson
- Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Utiliser le système complet d'événements associé à une variable aléatoire pour calculer la probabilité d'un événement
- Montrer d'une variable aléatoire admet une espérance ou une variance et la calculer
- Calculer l'espérance et/ou la variance d'une variable aléatoire discrète à l'aide de toutes les techniques en lien avec les séries numériques

Programme à venir. . .

Programme identique

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4393

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

Sur l'ensemble du programme

EX. 2 | Réf. 1166

Soit $q \in]0;1[$, on considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X=n]) = q \times \mathbb{P}([X \geq n])$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

EX. 3 | Réf. 1260

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant la boule noire.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

EX. 4 | Réf. 1345

Soient a et b deux entiers naturels vérifiant $1 \leq b < a$.
Une urne contient a boules dont b boules blanches et $a-b$ boules noires.
On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages justes nécessaires pour obtenir 2 boules blanches.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

EX. 5 | Réf. 1272

1. On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   - **a.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}([X=2k])$.
   - **b.** X a-t-elle plus de chances d'être paire que d'être impaire ?
2. Même question si X suit une loi géométrique de paramêtre p.

EX. 6 | Réf. 1249

On dispose de deux dés D_1 et D_2 équilibrés. Les faces de D_1 sont numérotées de 1 à 6, tandis que D_2 possède 5 faces portant le numéro 1 et une face portant le numéro 6. On choisit au hasard un dé, et on le lance deux fois. On considère les événements :

- E : « le premier lancer donne la face numérotée 1 »
- F : « le deuxième lancer donne la face numérotée 1 »

1. Calculer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$.
2. **a.** Sachant que l'on a choisit le dé D_2, quelle est la probabilité de l'événement $E \cap F$?
   b. Calculer $\mathbb{P}(E \cap F)$.
3. E et F sont-ils indépendants ?

EX. 7 | Réf. 1257

Sur 100 dés, il y en a 25 qui sont pipés. La probabilités d'obtenir un 6 avec un dé pipé est $\frac{1}{2}$.

1. On choisit un dé, et on le lance. Quelle est la probabilité d'avoir lancé un dé pipé sachant que l'on a obtenu un 6 ?
2. On relance le dé et l'on obtient encore un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

EX. 8 | Réf. 1258

On dispose de deux dés A et B. Le dé A possède quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie équilibrée. Si l'on obtient « pile », on décide de jouer uniquement avec le dé A, et si on obtient « face » on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge à un lancer quelconque d'un dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer, sachant que l'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers lancers.
3. Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A, sachant que l'on a obtenu rouge aux n premiers lancers ($n \geq 1$).

EX. 9 | Réf. 4467

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

   En déduire alors la valeur de λ.
2. Justifier que X admet une espérance, puis la calculer.
3. X admet-elle une variance ?

EX. 10 | Réf. 4464

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

EX. 11 | Réf. 4466

Un joueur lance deux dés parfaitement équilibrés jusqu'à ce qu'il obtienne un « double six ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui ont été effectués pour obtenir ce premier « double six ».

1. Donner la loi de probabilité de la variable X.
2. Montrer que X admet une espérance mathématique, puis la calculer. Comment interpréter ce résultat ?
3. On désigne maintenant par Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que la somme des deux dés soit supérieure ou égale à 10.
   - **a.** Quelle est la loi de Y ?
   - **b.** Montrer que Y admet une espérance mathématique, puis la calculer.

EX. 12 | Réf. 1261

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. Soit n un entier compris entre 1 et N. On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne (donc sans remise). On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré.

1. Combien y a-t-il de poignées de n boules possibles ?

2. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?

3. Combien y a-t-il de poignées telles que $Y \geq k$? En déduire $\mathbb{P}(Y \geq k)$?

4. Déterminer la loi de Y.

EX. 13 | Réf. 1267

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une et sans remise. On s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer $\mathbb{P}([X > 2])$ et $\mathbb{P}([X = 2])$.
Pour $k \geq 2$, préciser l'événement $[X > k]$ et en déduire la loi de X.

EX. 14 | Réf. 1263

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- si X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$, le compteur affiche la bonne valeur de X ;
- pour $X = 0$ ou $X = n$, le compteur affiche un nombre au hasard compris entre 1 et $n-1$.

1. Quelle est, en moyenne, la valeur affichée par le compteur ?

2. Quelle est la probabilité que le compteur affiche la valeur prise par X ?

EX. 15 | Réf. 1401

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

2. Déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$ où $n \in \mathbb{N}$.

EX. 16 | Réf. 4465

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et : } \qquad (\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2^k}{3^{k+1}}$$

Y désigne une variable aléatoire indépendante de X suivant la même loi que X et définie aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Vérifier que la relation $(\star)$ permet bien de définir une loi de probabilité.

2. On définie la variable aléatoire Z par $Z = X + Y$.

a. Quelle est la loi de Z ?

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $S = \dfrac{1}{1+Z}$.

c. En remarquant que $\dfrac{X}{1+Z} + \dfrac{Y}{1+Z} + S = 1$, déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\dfrac{X}{1+Z}$.