Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL03 - Définition 8 - Famille libre
- AL03 - Théorème 1 - Liberté et système linéaire
- AL03 - Théorème 3 - Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et système linéaire

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Foire au calcul dans $\mathbb{C}$: obtention de la forme algébrique d'une combinaison linéaire de complexes, de l'inverse d'un complexe, d'un quotient de complexes et d'un calcul combinant ces techniques.

et

Étudier la liberté ou le caractère générateur d'une famille de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ par recherche du rang de la matrice de la famille de vecteurs ou obtenir une relation de dépendance pour une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

CL02 | Travailler avec les nombres complexes

- Forme algébrique d'un complexe
- Opérations avec les complexes
- Conjugaison, inverse et quotient de complexes
- Solutions complexes d'une équations de degré 2 à coefficients réel

AL03 | Travailler dans $\mathbb{R}^n$

- Notion de $p-$uplets d'élements de $\mathbb{R}$
- Opérations dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^n$
- Combinaison linéaire de vecteurs
- Sous-espace engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
- Matrice d'une famille de vecteurs
- Familles libres et liées de $\mathbb{R}^n$
- Caractérisation des familles libres par le rang de la matrice de la famille
- Caractérisation des familles génératrice par le rang de la matrice de la famille

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Déterminer la forme algébrique d'un complexe ;
- Déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe ;
- Déterminer la forme algébrique d'un quotient de complexes ;
- Gérer des calculs complexes avec les complexes ;
- Écrire la matrice d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
- Étudier le caractère libre d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de sa matrice
- Étudier le caractère génŕateur d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de sa matrice
- Obtenir une relation de dépendance entre les vecteurs d'une famille liée
- Montrer qu'un vecteur appartient au sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Programme à venir...

Reprise du programme à l'identique

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 3223

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2, -1, 1, 2), \quad u_2 = (1, 2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -7, -2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0, -10, -2, 0)$$

EX. 2 | Réf. 3171

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où l'on a :

$$u_1 = (1, -2, 1, 3) \quad u_2 = (2, -1, 1, 2) \quad u_3 = (-2, 1, 2, -1) \quad u_4 = (-2, -2, 3, 3)$$

1. Écrire la matrice A de cette famille de vecteurs.
2. Étudier le caractère libre et générateur de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^4$.

EX. 3 | Réf. 4782

Étant donnés les deux complexes $z = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z' = -1 + 2\mathrm{i}$, déterminer la forme algb́rique des complexes :

1. $z_1 = 3z - 2z'$
2. $z_2 = (1 + \mathrm{i})\, z - 2\,(2 - \mathrm{i})\, z'$
3. $z_3 = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z'}$
4. $z_4 = \dfrac{z}{z'}$
5. $z_5 = \dfrac{z + 1}{z' - 1}$
6. $z_6 = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z' + 2\mathrm{i}} - \left(\dfrac{1 - \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2$

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 4783

Déterminer les solutions, éventuellement complexes, des équations de degré 2 suivantes :

1. $(E_1) :\ x^2 - 6x + 10 = 0$
2. $(E_2) :\ x^2 - 4x + 5 = 0$
3. $(E_3) :\ x^2 - 10x + 8 = 0$
4. $(E_4) :\ -x^2 + 11x - 30 = 0$
5. $(E_5) :\ 2x^2 + 8x + 26 = 0$
6. $(E_6) :\ 2x^2 + 4x + 20 = 0$

EX. 5 | Réf. 4784

Soit $z = \dfrac{3 - 2\mathrm{i}}{5 + \mathrm{i}}$ et $z' = \dfrac{3 + 2\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}}$ deux nombres complexes.

1. Donner une relation entre $\overline{z}$ et z'.
2. Calculer alors $z + z'$ et $z - z'$.

EX. 6 | Réf. 4785

Déterminer le nombre complexe z solution de l'équation : $(\star) :\ (1 + 3\mathrm{i})\, z + 2 - 4\mathrm{i} = 0$.

EX. 7 | Réf. 4786

Dans chaque cas, déterminer les nombres réels x et y tels que :

1. $(2x + 1) - 3\mathrm{i} = 5 + (2 - y)\,\mathrm{i}$
2. $(x + 3) + (y - 3)\,\mathrm{i} = 6$
3. $(-x + 1) + (2y + 1)\,\mathrm{i} = -3\mathrm{i}$
4. $(-2x + 3) + (2 - 3y)\,\mathrm{i} = 5 - 7\mathrm{i}$

EX. 8 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 9 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, -2, 3) \text{ et } e_4 = (1, 1, 2, -2).$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.