Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- PR05 - Théorème 6 - Lien entre variance et covariance
- PR05 - Définition 6 et Théorème 5 - Covariance de deux variables aléatoires finies et Calcul pratique de la covariance
- PR05 - Théorème 8 et Théorème 7 - Covariance de deux variables aléatoires indépendantes et Variance de deux variables aléatoires indépendantes

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires à support fini dont la loi conjointe est donnée dans un tableau de valeurs.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

PR01 | Probabilités sur un univers fini

- Reprise de son cours de 1e année

PR02 | Conditionnement et indépendance

- Reprise de son cours de 1e année

PR03 | Variables aléatoires finies sur un univers fini

- Reprise de son cours de 1e année

PR04 | Lois usuelles finies

- Reprise de son cours de 1e année

PR05 | Indépendance et couples de variableas aléatoires finies

- Loi conjointe
- Lois marginales et lois conditionnelles
- Indépendance de deux variables aléatoires finies
- Indépendance de n variables aléatoires
- Somme et produit de deux variables aléatoires finies
- Covariance et coefficient de corrélation linéaire
- Covariance et indépendance

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Étudier la convergence d'une série numérique à termes positifs (théorème d'équivalence notamment)
- Déterminer la somme d'une série numérique à l'aide de séries géométriques ou exponentielles
- Déterminer la loi d'un couple de variables aléatoires
- Déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires
- Déterminer les lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires
- Montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes
- Calculer la covariance d'un couple et le coefficient de corrélation linéaire d'un couple de variables aléatoires

Programme à venir. . .

Variables aléatoires discrètes

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4763

Soient X et Y deux variables alétoires discrètes avec $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, et dont la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

1. Donner les lois marginales de X et de Y.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Sur l'ensemble du programme

EX. 2 | Réf. 4755

Soit X un variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = [\![1; 8]\!]$ et telle que :

$$\forall k \in [\![1; 7]\!], \mathbb{P}([X = k+1]) = 2 \times \mathbb{P}([X = k])$$

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

EX. 3 | Réf. 1343

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et β un nombre réel. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0; n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\beta}{k+1}$$

1. Quelle valeur donner à β pour que l'on définisse bien la loi d'une variable aléatoire ?

2. Déterminer alors $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{V}(X)$.

EX. 4 | Réf. 0801

Une urne contient une boule rouge, deux boules noires, et trois boules jaunes.
On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes.
Soit X le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

EX. 5 | Réf. 3514

Une urne contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule noire. Le tirage d'une boule jaune rapporte 1 point, celui d'une boule rouge 2 points et celui de la boule noire coûte 3 points.
De l'urne, on tire simultanément et au hasard deux boules. On désigne par X la variable aléatoire égale au total des points marqués.
Déterminer la loi de X puis calculer $\mathbb{E}(X)$.

EX. 6 | Réf. 1267

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une et sans remise. On s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer $\mathbb{P}([X > 2])$ et $\mathbb{P}([X = 2])$.
Pour $k \geq 2$, préciser l'événement $[X > k]$ et en déduire la loi de X.

EX. 7 | Réf. 1269

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une boîte B contenant n boules numérotées de 1 à n et de n boîtes B_1, ..., B_n. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, la boîte B_k contient k boules numérotées de 1 à k. On tire au hasard une boule de B, puis k désignant le numéro de la boule obtenue, on tire au hasard une boule dans B_k.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage.
Déterminer la loi de X, puis son espérance.

EX. 8 | Réf. 4756

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$.

Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X \geq k])$.

EX. 9 | Réf. 1331

La loi du couple aléatoire finies (X, Y) est donné par le tableau suivant :

1. Déterminer la constante α.
2. Donner les lois marginales de X et de Y.
3. Quelle est la loi de Y sachant que $[X \leq 7]$?

X \ Y	0	1	2
3	3α	6α	7α
7	9α	12α	15α
37	0	0	18α

EX. 10 | Réf. 1248

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernouilli de paramètres respectifs p et r telles que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

EX. 11 | Réf. 1253

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$. On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans cette urne. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. plus grand) des deux numéros tirés.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) et en déduire les loi de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

EX. 12 | Réf. 4400

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes définie sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.
On désigne alors par Y la variable aléatoire égale au maximum des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n, c'est à dire que $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.