Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- TX02 - Proposition 1 - Opérations sur les puissances
- TX04 - Théorème 1 - Relation fondamentale et formules de calcul | Cas de la fonction $\ln$
- CL01 - Théorème 1 - Sommes des premiers entiers et puissances
- CL01 - Théorème 2 - Formule de Pascal | Construction du tableau jusqu'à la ligne $n = 6$
- CL01 - Théorème 3 - Formule du binôme de Newton

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Simplification d'expression(s) faisant intervenir des puissances

et

Résolution complète par échelonnement réduit en lignes d'un système linéaire de taille 3×3

et

Utilisation de la formule du binôme pour développer et simplifier une expression de la forme $(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^n$ avec $n \geq 4$

La résolution doit se faire impérativement par un échelonnement réduit en lignes en respectant l'algorithme de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires.
Toute résolution ne respectant pas ce point ne sera pas acceptée par votre interrogateur.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

TX01 | Manipuler les écritures fractionnaires

- Tout...

TX02 | Manipuler les puissances et les radicaux

- Tout...

TX03 | Calcul algébrique

- Tout...

TX04 | Opérations avec $\ln$ et $\exp$

- Tout...

TX05 | Équations de degré 1 ou 2 et s'y ramenant

- Tout...

AL01 | Représentation matricielle des systèmes linéaires

- Tout

AL02 | Échelonnement de systèmes linéaires

- Tout

CL01 | Calculs de sommes et de produit finis

- Tout

CL02 | Travailler avec les nombres complexes

- Forme algébrique d'un complexe
- Opérations avec les complexes
- Conjugaison, inverse et quotient de complexes
- Solutions complexes d'une équations de degré 2 à coefficients réel

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Déterminer la forme algébrique d'un complexe ;

- Déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe ;
- Déterminer la forme algébrique d'un quotient de complexes ;
- Gérer des calculs complexes avec les complexes.

Programme à venir. . .

Nombres complexes | Travailler dans $\mathbb{R}^n$

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4895

Exprimer le quotient ci-dessous uniquement à l'aide de puissances d'entiers appartenant à $\{2,3,5,7\}$:

$$A = \frac{8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2}{21^4 \times \left(2^2 \times 5^3\right)^{-2}}$$

EX. 2 | Réf. 5007

Développez puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x - 5)^5$$

$$B = \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^6$$

EX. 3 | Réf. 2740

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnue le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + \ \ z = 8 \end{cases}$$

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 4782

Étant donnés les deux complexes $z = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z' = -1 + 2\mathrm{i}$, déterminer la forme algbrique des complexes :

1. $z_1 = 3z - 2z'$
2. $z_2 = (1 + \mathrm{i})\, z - 2\,(2 - \mathrm{i})\, z'$
3. $z_3 = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z'}$
4. $z_4 = \dfrac{z}{z'}$
5. $z_5 = \dfrac{z+1}{z'-1}$
6. $z_6 = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z' + 2\mathrm{i}} - \left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$

EX. 5 | Réf. 5012

Le vecteur $u = (1, 1, 2)$ est-il comibinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$ et $v_3 = (2, 2, 1)$?

EX. 6 | Réf. 4783

Déterminer les solutions, éventuellement complexes, des équations de degré 2 suivantes :

1. $(E_1) : x^2 - 6x + 10 = 0$
2. $(E_2) : x^2 - 4x + 5 = 0$
3. $(E_3) : x^2 - 10x + 8 = 0$
4. $(E_4) : -x^2 + 11x - 30 = 0$
5. $(E_5) : 2x^2 + 8x + 26 = 0$
6. $(E_6) : 2x^2 + 4x + 20 = 0$

EX. 7 | Réf. 4784

Soit $z = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$ et $z' = \dfrac{3+2\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}$ deux nombres complexes.

1. Donner une relation entre $\overline{z}$ et z'.
2. Calculer alors $z + z'$ et $z - z'$.

EX. 8 | Réf. 4785

Déterminer le nombre complexe z solution de l'équation : $(\star) : (1+3\mathrm{i})\, z + 2 - 4\mathrm{i} = 0$.

EX. 9 | Réf. 4786

Dans chaque cas, déterminer les nombres réels x et y tels que :

1. $(2x+1) - 3\mathrm{i} = 5 + (2-y)\,\mathrm{i}$
2. $(x+3) + (y-3)\,\mathrm{i} = 6$
3. $(-x+1) + (2y+1)\,\mathrm{i} = -3\mathrm{i}$
4. $(-2x+3) + (2-3y)\,\mathrm{i} = 5 - 7\mathrm{i}$

EX. 10 | Réf. 4782

Étant donnés les deux complexes $z = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z' = -1 + 2\mathrm{i}$, déterminer la forme algb́rique des complexes :

1. $z_1 = 3z - 2z'$
2. $z_2 = (1+\mathrm{i})\, z - 2\,(2-\mathrm{i})\, z'$
3. $z_3 = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z'}$
4. $z_4 = \dfrac{z}{z'}$
5. $z_5 = \dfrac{z+1}{z'-1}$
6. $z_6 = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z'+2\mathrm{i}} - \left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$

EX. 11 | Réf. 5012

Le vecteur $u = (1,1,2)$ est-il comibinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$ et $v_3 = (2,2,1)$?

EX. 12 | Réf. 2278

Résoudre le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} -4x + 5y = -9 \\ 12x - 3y = 7 \end{cases}$.

EX. 13 | Réf. 3124

Pour chacun des deux systèmes suivants donnés sous leur forme matricielle, déterminer leur rang, leur comptabilité et lorsque c'est le cas l'ensemble de leur(s) solution(s).

$$\mathcal{S}_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

EX. 14 | Réf. 2133

Pour les deux systèmes suivants :
- Déterminer le rang du système ;
- Déterminer la matrice échelonnée réduite du système ;
- Le résoudre.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 5y + 6z = -11 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -2t + x - 2y + 3z = -12 \\ -t + x - y + z = -5 \\ 2t + 2x + 3y - z = 15 \\ -2t + 4x + y + z = -1 \end{cases}$$

EX. 15 | Réf. 1061

Discuter et résoudre en fonction du paramètre réel a les systèmes linéaires d'inconnue le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + a^2 y = a \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} (a-1)x + 2ay = -2 \\ 2ax - (a-1)y = a - 1 \end{cases}$$

EX. 16 | Réf. 1062

Discuter et résoudre en fonction de m :

$$\begin{cases} mx + y + z = X \\ x + my + z = Y \\ x + y + mz = Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$$

EX. 17 | Réf. 2977

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S = \displaystyle\sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{3^{k+1}}{4^k} \right)$.

EX. 18 | Réf. 2700

Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{50} \frac{k^2 - k - 2}{k - 2}$ en utilisant le changement d'indice $j = k - 2$.

EX. 19 | Réf. 3008

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2 + k - 2}{(k+3)^2} \right)$.

EX. 20 | Réf. 2505

Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ où $n \geq 2$.

EX. 21 | Réf. 2999

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$.

EX. 22 | Réf. 1767

Soit n un entier naturel non nul.

1. En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, calculer $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2. Sur le même principe, calculer $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

EX. 23 | Réf. 1781

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. On considère un réel $p \in \,]0;1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k+1} k = 3n4^{n-1}$.

EX. 24 | Réf. 2997

1. Calculer $\displaystyle\binom{30}{2}$ et $\displaystyle\binom{30}{29}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $A = \dfrac{n+2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

EX. 25 | Réf. 3002

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k-1}$.

EX. 26 | Réf. 3001

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1} 2^{n-3k}$.

EX. 27 | Réf. 2036

Soient k, p et n trois entiers vérifiant $0 \leq k \leq p \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
2. En déduire une expression simplifiée de $S = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.