Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- TX02 - Proposition 1 - Opérations sur les puissances
- TX04 - Théorème 1 - Relation fondamentale et formules de calcul | Cas de la fonction $\ln$
- CL01 - Théorème 1 - Sommes des premiers entiers et puissances
- CL01 - Théorème 2 - Formule de Pascal | Construction du tableau jusqu'à la ligne $n = 6$
- CL01 - Théorème 3 - Formule du binôme de Newton

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Simplification d'expression(s) faisant intervenir des puissances

et

Résolution complète par échelonnement réduit en lignes d'un système linéaire de taille 3×3

et

Utilisation de la formule du binôme pour développer et simplifier une expression de la forme $(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^n$ avec $n \geq 4$

La résolution doit se faire impérativement par un échelonnement réduit en lignes en respectant l'algorithme de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires.
Toute résolution ne respectant pas ce point ne sera pas acceptée par votre interrogateur.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

TX01 | Manipuler les écritures fractionnaires

- Tout. . .

TX02 | Manipuler les puissances et les radicaux

- Tout. . .

TX03 | Calcul algébrique

- Tout. . .

TX04 | Opérations avec $\ln$ et $\exp$

- Tout. . .

TX05 | Équations de degré 1 ou 2 et s'y ramenant

- Tout. . .

AL01 | Représentation matricielle des systèmes linéaires

- Tout

AL02 | Échelonnement de systèmes linéaires

- Tout

CL01 - Claculs de sommes et de produit finis

- Tout

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Résoudre un système par échelonnement réduit
- Expliciter les solutions d'un système linéaire
- Déterminer le rang d'un système
- Utiliser les formules de sommes usuelles
- Faire un changement d'indice dans une somme
- Effectuer un téléscopage de termes dans une somme
- Utiliser le binôme de Newton pour développer une expression

Programme à venir...

Reprise du programme actuel | Nombres complexes

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4895

Exprimer le quotient ci-dessous uniquement à l'aide de puissances d'entiers appartenant à $\{2,3,5,7\}$:

$$A = \frac{8\times(7\times 5)^5 \times \dfrac{5^2\times 7^3}{7^4\times 5^5}\times\left(7^{-2}\right)^2}{21^4\times\left(2^2\times 5^3\right)^{-2}}$$

EX. 2 | Réf. 5007

Développez puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x-5)^5$$

$$B = \left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^6$$

EX. 3 | Réf. 2740

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnue le triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$\mathcal{S}:\begin{cases} x-y+2z=9\\ -x+y+2z=3\\ 2x-y+z=8\end{cases}$$

Sur l'ensemble du programme

EX. 4 | Réf. 2278

Résoudre le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases}-4x+5y=-9\\ 12x-3y=7\end{cases}$.

EX. 5 | Réf. 3124

Pour chacun des deux systèmes suivants donnés sous leur forme matricielle, déterminer leur rang, leur comptabilité et lorsque c'est le cas l'ensemble de leur(s) solution(s).

$$\mathcal{S}_1:\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&1&1\\ 5&0&-5&1\\ 2&-1&-2&0\\ -1&1&2&1\end{array}\right) \quad\text{et}\quad \mathcal{S}_2:\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-1&-1&-2&1\\ -1&-1&-2&1&1\\ 1&-3&-4&-3&3\end{array}\right)$$

EX. 6 | Réf. 2133

Pour les deux systèmes suivants :

- Déterminer le rang du système ;
- Déterminer la matrice échelonnée réduite du système ;
- Le résoudre.

$$\mathcal{S}_1:\begin{cases}2x-y-2z=-2\\ -x+3y-2z=7\\ 5x-5y+6z=-11\end{cases}\quad\text{et}\quad \mathcal{S}_2:\begin{cases}-2t+x-2y+3z=-12\\ -t+x-y+z=-5\\ 2t+2x+3y-z=15\\ -2t+4x+y+z=-1\end{cases}$$

EX. 7 | Réf. 1061

Discuter et résoudre en fonction du paramètre réel a les systèmes linéaires d'inconnue le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}_1 \quad : \quad \begin{cases} x + \quad y = 1 \\ x + a^2 y = a \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 \ : \ \begin{cases} (a-1)x + \qquad 2ay = -2 \\ \qquad 2ax - (a-1)y = a - 1 \end{cases}$$

EX. 8 | Réf. 1062

Discuter et résoudre en fonction de m :

$$\begin{cases} mx + \quad y + \quad z = X \\ x + my + \quad z = Y \\ x + \quad y + mz = Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+1)x + \qquad my & = 2m \\ \qquad mx + (m+1)y & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \ my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + \ mz = 2m \\ mx + \quad y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-1)x - \qquad my & = m \\ (m+1)x + (m+1)y & = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my & = m^2 \\ mx + \quad y & = m^2 \end{cases}$$

EX. 9 | Réf. 2977

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S = \displaystyle\sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{3^{k+1}}{4^k} \right)$.

EX. 10 | Réf. 2700

Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{50} \frac{k^2 - k - 2}{k - 2}$ en utilisant le changement d'indice $j = k - 2$.

EX. 11 | Réf. 3008

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln \left(\frac{k^2 + k - 2}{(k+3)^2} \right)$.

EX. 12 | Réf. 2505

Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$ où $n \geq 2$.

EX. 13 | Réf. 2999

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$.

EX. 14 | Réf. 1767

Soit n un entier naturel non nul.

1. En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, calculer $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

2. Sur le même principe, calculer $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

EX. 15 | Réf. 1781

Soit n un entier naturel non nul.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. On considère un réel $p \in]0;1[$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k+1} k = 3n4^{n-1}$.

EX. 16 | Réf. 2997

1. Calculer $\binom{30}{2}$ et $\binom{30}{29}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $A = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$.

EX. 17 | Réf. 3002

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k-1}$.

EX. 18 | Réf. 3001

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1} 2^{n-3k}$.

EX. 19 | Réf. 2036

Soient k, p et n trois entiers vérifiant $0 \leq k \leq p \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

2. En déduire une expression simplifiée de $S = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.