Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AL03 - Définition 1 - Famille libre | Interprétation incluse
- AL03 - Théorème 1 - Liberté et système linéaire
- AL03 - Théorème 3 - Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et système linéaire

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Foire au calcul dans $\mathbb{C}$: obtention de la forme algébrique d'une combinaison linéaire de complexes, de l'inverse d'un complexe, d'un quotient de complexes et d'un calcul combinant ces techniques.

Montrer qu'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de 3 autres vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

ou

Étudier la liberté ou le caractère générateur d'une famille de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ par recherche du rang de la matrice de la famille de vecteurs

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

CL02 - Travailler avec les nombres complexes

- Reprise programme précédent

AL03 - Travailler dans $\mathbb{R}^n$

- Reprise programme précédent
- Sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par une famille de vecteurs
- Familles libres et liées de $\mathbb{R}^n$
- Familles génératrices de $\mathbb{R}^n$
- Matrice d'une famille de vecteurs
- Caractérisation des familles libres par le rang de la matrice de la famille
- Caractérisation des familles génératrice par le rang de la matrice de la famille

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise du programme précédent ;
- Écrire la matrice d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
- Étudier le caractère libre d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de sa matrice
- Étudier le caractère génŕateur d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de sa matrice
- Obtenir une relation de dépendance entre les vecteurs d'une famille liée
- Montrer qu'un vecteur appartient au sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Programme à venir

Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (suite) | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [4782] | 1| Forme algébrique d'un complexe

Étant donnés les deux complexes $z = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z' = -1 + 2\mathrm{i}$, déterminer la forme algbrique des complexes :

(1). $z_1 = 3z - 2z'$

(2). $z_2 = (1+\mathrm{i})\,z - 2\,(2-\mathrm{i})\,z'$

(3). $z_3 = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z'}$

(4). $z_4 = \dfrac{z}{z'}$

(5). $z_5 = \dfrac{z+1}{z'-1}$

(6). $z_6 = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z'+2\mathrm{i}} - \left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$

Exercice| [5012] | 2| Combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Le vecteur $u = (1,1,2)$ est-il comibinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$ et $v_3 = (2,2,1)$?

Exercice| [3171] | 3| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où l'on a :

$$u_1 = (1,-2,1,3) \quad u_2 = (2,-1,1,2) \quad u_3 = (-2,1,2,-1) \quad u_4 = (-2,-2,3,3)$$

(1). Écrire la matrice A de cette famille de vecteurs.

(2). Étudier le caractère libre et générateur de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [2974] | 4| Liberté d'une famille

La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_3)$ avec $u_1 = (3,0,3,-1)$, $u_2 = (-1,2,-3,0)$ et $u_3 = (2,1,5,1)$ est-elle libre ?

Exercice| [2329] | 5| Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :

$$u_1 = (2,-2,3),\ u_2 = (-1,-1,2),\ u_3 = (3,-1,2) \text{ et } u_4 = (-2,-2,3).$$

(1). Sans calculs , expliquer pourquoi la famille $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

(2). Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(3). Soit $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.
Justifier que u peut s'écrire comme combinaison linéaire des quatre vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4, puis déterminer quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\lambda_1.u_1+\lambda_2.u_2+\lambda_3.u_3+\lambda_4.u_4 = u$.

Exercice| [2972] | 6| Liberté et caractère générateur d'une famille

On a écrit ci-dessous les matrices de familles $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Dans chaque cas :

(1). identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$;

(2). étudier le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$;

(3). étudier le caractère générateur de la famille $\mathcal{F}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice| [3223] | 7| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2,-1,1,2)\,, \quad u_2 = (1,2,1,1)\,, \quad u_3 = (-1,-7,-2,-1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0,-10,-2,0)$$

Exercice| [2396] | 8| Étudier la liberté d'une famille dépendant d'un paramètre

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1,a,3)$, $u_2 = (1,1,a)$, et $u_3 = (a,1,3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

Exercice| [2397] | 9| Caractère libre et générateur d'une famille de $\mathbb{R}^n$

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1 = (1,1,1,1), \quad e_2 = (0,1,2,1), \quad e_3 = (1,0,-2,3) \text{ et } e_4 = (1,1,2,-2).$$

(1). La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(2). Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1,1,\alpha,\beta)$ appartienne à $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice| [2970] | 10| Sous-espace engendré

Le vecteur $u = (-2,3,1,1) \in \mathbb{R}^4$ appartient-il au sous-espace $\mathbb{F} = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (3,0,0,2)$ et $v_3 = (-1,1,-1,1)$?

Exercice| [2965] | 11| Liberté et représentation matricielle

On a écrit ci-dessous les matrices de familles de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Dans chaque cas, identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$, et dire s'il s'agit d'une famille libre ou non.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$