

Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- PR08 - Théorème 1 - Espérance et variance d'une loi géométrique
- PR08 - Théorème 3 - Espérance et variance d'une loi de Poisson
- PR08 - Théorème 4 - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Utiliser le théorème du transfert pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après. Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

PR06 - Probabilité sur un univers dénombrable

- Notion d'univers fini et dénombrable
- Probabilité sur un univers dénombrable
- Opérations sur les événements et les probabilités
- Probabilités conditionnelles et formule de probabilités composées ;
- Système complet d'événements et formule des probabilités totales
- Indépendance deux à deux ou mutuelle pour des familles d'événements

PR07 - Variables aléatoires discrètes

- Loi d'une variable aléatoire discrète et système complet d'événements associés
- Fonction de répartition et propriétés caractéristiques
- Image d'une variable aléatoire par une application
- Espérance d'une variable aléatoire discrète
- Linéarité, croissance et positivité de l'espérance
- Théorème du transfert
- Variance et bilinéarité
- Variables aléatoires indépendantes
- Notion de couple de variables aléatoires discrètes

PR08 - Lois usuelles discrètes

- Loi géométrique
- Caractérisation des variables aléatoires discrètes sans mémoire
- Loi de Poisson

- Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Utiliser le système complet d'événements associé à une variable aléatoire pour calculer la probabilité d'un événement
- Montrer d'une variable aléatoire admet une espérance ou une variance et la calculer
- Calculer l'espérance et/ou la variance d'une variable aléatoire discrète à l'aide de toutes les techniques en lien avec les séries numériques

Programme à venir

Reprise du programme à l'identique | Fonctions polynômes (début)

Pour la pratique calculatoire**Exercice|[4393]| 1| Théorème de transfert et calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète**

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2(X - 1)$ admet une espérance et la calculer.

Sur l'ensemble du programme**Exercice|[1166]| 2| Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète**

Soit $q \in]0; 1[$, on considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = n]) = q \times \mathbb{P}([X \geq n])$$

- (1). Déterminer la loi de X .
- (2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice|[1260]| 3| Reconnaître et travailler avec une loi géométrique

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant la boule noire.

- (1). Quelle est la loi de X ?
- (2). Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice|[1345]| 4| Temps d'attente d'une deuxième boule blanche

Soient a et b deux entiers naturels vérifiant $1 \leq b < a$.

Une urne contient a boules dont b boules blanches et $a - b$ boules noires.

On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages justes nécessaires pour obtenir 2 boules blanches.

- (1). Déterminer la loi de X .
- (2). Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice|[1272]| 5| Parité d'une loi de Poisson ou d'une loi géométrique

- (1). On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- (a). Calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}([X = 2k])$.

- (b). X a-t-elle plus de chances d'être paire que d'être impaire?

- (2). Même question si X suit une loi géométrique de paramètre p .