

Thématique(s) de la semaine

AN10 | Intégration d'une fonction continue

- Ébauche de construction de l'intégrale d'une fonction continue
- Positivité et croissance de l'intégrale
- Inégalité triangulaire
- Relation de Chasles
- Linéarité de l'intégrale
- Primitive d'une fonction
- Lien intégrale et primitive
- Théorème fondamental de l'analyse
- Intégration par parties
- Changement de variables
- Intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Obtention d'une primitive d'une fonction continue par lecture inverse du tableau des dérivées
- Calculer une intégrale par primitivation directe
- Calculer une intégrale par intégration par parties
- Utiliser la parité ou l'imparité d'une fonction pour un calcul d'intégrales
- Calculer une intégrale par changement de variables

Programme à venir...

Reprise programme à l'identique

Sur l'ensemble du programme

EX. 1 | Réf. 3255

Déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arctan(x^3) e^{-x^2}}{1 + \tan^2(x)} dx$.

EX. 2 | Réf. 3256

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \int_{-4}^4 |x^2 - 5x + 6| dx$.
2. Calculer l'intégrale $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin(x)| dx$.

EX. 3 | Réf. 2065

On considère : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2} \end{array}$$

1. Calculer $J = \int_0^1 f(x) dx$.
2. Soit $K = \int_0^1 g(x) dx$.
 - a. Calculer $J + K$.
 - b. En déduire la valeur de K .

EX. 4 | Réf. 2060

Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$.

En déduire : $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2} dx$.

EX. 5 | Réf. 2056

On considère la fonction : $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^x \end{cases}$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que la fonction réelle $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x (ax^2 + bx + c) \end{cases}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

2. En déduire la valeur de $I = \int_{-2}^1 x^2 e^x dx$.

EX. 6 | Réf. 3565

Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^\pi (x^2 - 2x + 2) \cos(2x) dx$ à l'aide de plusieurs intégrations par parties.

EX. 7 | Réf. 3502

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_1^2 \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$;

2. $\int_{-1}^1 (x^2 + 5x + 6) \cos(2x) dx$.

EX. 8 | Réf. 2336

1. Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives $I = \int_0^1 (x^2 + x + 1) e^x dx$.

2. On se propose de calculer $J = \int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$.

a. Pour $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, écrire sous forme d'un seul quotient l'expression :

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} - \frac{2}{1+u^2}.$$

b. Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ dans l'intégrale J , puis la calculer.

EX. 9 | Réf. 2994

Calculer l'intégrale I avec le changement de variable proposé :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \text{ en posant } x = \tan(t);$$

EX. 10 | Réf. 2995

Calculer l'intégrale I avec le changement de variable proposé :

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dt \text{ en posant } x = \sin(t);$$

EX. 11 | Réf. 4849

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$;

2. $\int_0^1 x \arctan(x) dx$;

3. $\int_1^e \ln(x) dx$;

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$.

EX. 12 | Réf. 2993

Calculer l'intégrale I avec le changement de variable proposé :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx \text{ en posant } t = 1 + \sqrt{x}.$$

EX. 13 | Réf. 2198

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^e \frac{1}{t + t(\ln(t))^2} dt$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1 .
2. À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2 .