Question de cours | Restitution de cours | Situation classique | 5 minutes | 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN05 - Proposition 3 - Séries géométriques dérivées
- AN05 - Théorème 8 - Critère de convergence pour les séries de Riemann
- AN05 - Théorème 13 - Règle de d'Alembert

Pratique calculatoire | 20 minutes | 8 points

Étudier la convergence et calculer la somme d'une série à partir de la suite des sommes partielles dont on explicitera au préalable le terme général

ou

Étudier la convergence et calculer la somme d'une série à partir de la suite des sommes partielles dont on explicitera au préalable le terme général faisant intervenir les séries géométriques (éventuellement dérivées) ou la série exponentielle.

On privilégiera les séries téléscopiques.

Thématique(s) de la semaine | 30 minutes | 10 points

AN05 | Séries numériques

- Somme partielle et série numérique
- Opérations sur les séries
- Séries absolument convergentes
- Séries géométriques et séries dérivées
- Séries de Riemann
- Série exponentielle

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Étudier la convergence d'une série numérique à partir de l'expression du terme général de la suite des sommes partielles
- Étudier la convergence et calculer la somme d'une série se ramenant à une série de référence à partir de l'expression du terme général de la suite des sommes partielles
- Utiliser les séries géométriques (éventuellement dérivées) pour étudier la convergence et calculer la somme d'une série
- Utiliser la série exponentielle pour étudier la convergence et calculer la somme d'une série

Programme à venir...

Reprise du programme actuel

Pour la pratique calculatoire

EX. 1 | Réf. 4294

1. Montrer que la série numérique $\sum \dfrac{1}{n^2+4n+3}$ est convergente.

2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+3}$.

3. En déduire la somme de la série $\sum \dfrac{1}{n^2+4n+3}$.

EX. 2 | Réf. 2838

Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$.

EX. 3 | Réf. 5312

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \dfrac{n^2-2n+2}{2^n}$.

1. Montrer que cette série est convergente.
2. Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n^2-2n+2=an(n-1)+bn+c.$
3. En déduire alors la somme S de cette série.

EX. 4 | Réf. 5313

On se propose dans cet exercice de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \dfrac{n^2-4}{n!}$.

1. Montrer que cette série est convergente.
2. Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n^2-4=an(n-1)+bn+c.$
3. En déduire alors la somme S de cette série.

Sur l'ensemble du programme

EX. 5 | Réf. 0617

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$.

EX. 6 | Réf. 4293

1. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{(n+2)\left(n^2-1\right)}$ est convergente.
2. Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\,,\quad \frac{1}{(n+2)\left(n^2-1\right)}=\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n-1}+\frac{c}{n+1}$$
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(n+2)\left(n^2-1\right)}$.

EX. 7 | Réf. 4276

Étudier la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 2}\left(\dfrac{3^n}{7^{n-2}}\right)$ et en calculer la somme.

EX. 8 | Réf. 4273

Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ où le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

EX. 9 | Réf. 4277

On considère la série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$.

1. Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

EX. 10 | Réf. 2838

Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$.

EX. 11 | Réf. 4291

On considère série numérique $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $n^3 - 3n^2 + 1 = (n+3)(n+2)(n+1) + a(n+3)(n+2) + b(n+3) + c$.

2. En déduire alors l'expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

3. Montrer que $\sum u_n$ est convergente, et en calculer la somme.