

**Question de cours - 5 minutes - 2 points**

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- AN05 - Proposition 3 - Séries géométriques dérivées
- AN05 - Théorème 8 - Critère de convergence pour les séries de Riemann
- AN05 - Théorème 13 - Règle de d'Alembert
- PR05 - Théorème 6 - Lien entre variance et covariance
- PR05 - Définition 6 et Théorème 5 - Covariance de deux variables aléatoires finies et Calcul pratique de la covariance
- PR05 - Théorème 8 et Théorème 7 - Covariance de deux variables aléatoires indépendantes et Variance de deux variables aléatoires indépendantes

**Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points**

Calcul de la somme d'une série numérique faisant intervenir les séries géométriques dérivées ou la série exponentielle.

Ou

Calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires à support fini dont la loi conjointe est donnée dans un tableau de valeurs.

**Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points**

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après. Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

**AN05 - Séries numériques**

- Reprise de son cours de 1<sup>e</sup> année | A déjà dû être révisé pour la rentrée

**PR03 - Variables aléatoires finies sur un univers fini**

- Reprise de son cours de 1<sup>e</sup> année | A déjà dû être révisé pour le DS du 12/09/2022

**PR04 - Lois usuelles finies**

- Reprise de son cours de 1<sup>e</sup> année | A déjà dû être révisé pour le DS du 12/09/2022

**PR05 - Indépendance et couples de variables aléatoires finies**

- Loi conjointe
- Lois marginales et lois conditionnelles
- Indépendance de deux variables aléatoires finies
- Indépendance de  $n$  variables aléatoires
- Somme et produit de deux variables aléatoires finies
- Covariance et coefficient de corrélation linéaire
- Covariance et indépendance

**Exemples de savoir faire à maîtriser**

- Étudier la convergence d'une série numérique à termes positifs (théorème d'équivalence notamment)
- Déterminer la somme d'une série numérique à l'aide de séries géométriques ou exponentielles
- Déterminer la loi d'un couple de variables aléatoires
- Déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires
- Déterminer les lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires
- Montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes
- Calculer la covariance d'un couple et le coefficient de corrélation linéaire d'un couple de variables aléatoires

**Programme à venir**

Reprise programme actuel | Probabilités sur un univers dénombrable

**Pour la pratique calculatoire****Exercice| [4625] | 1| Somme d'une série numérique**

On se propose dans cette série de déterminer la somme  $S$  de la série numérique  $\sum \frac{n^2 - 2n + 2}{2^n}$ .

- (1). Montrer que cette série est convergente.
- (2). Déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 2n + 2 = an(n-1) + bn + c$ .
- (3). En déduire alors la somme  $S$  de cette série.

**Exercice| [4348] | 2| Somme d'une série numérique**

On se propose dans cet exercice de déterminer la somme  $S$  de la série numérique  $\sum \frac{n^2 - 4}{n!}$ .

- (1). Montrer que cette série est convergente.
- (2). Déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 4 = an(n-1) + bn + c$ .
- (3). En déduire alors la somme  $S$  de cette série.

**Exercice| [4763] | 3| Couples de variables aléatoires**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes avec  $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  et  $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ , et dont la loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

- Donner les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$ ,  $\mathbb{V}(X)$ ,  $\mathbb{V}(Y)$  et  $\text{Cov}(X, Y)$ .

### Sur l'ensemble du programme

#### Exercice [4276] | 4 | Somme d'une série

Étudier la convergence de la série numérique  $\sum_{n \geq 2} \left( \frac{3^n}{7^{n-2}} \right)$  et en calculer la somme.

#### Exercice [4293] | 5 | Séries numériques

- Montrer que la série numérique  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$  est convergente.
- Déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{(n+2)(n^2-1)} = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n+1}$$

- En déduire la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$ .

#### Exercice [4273] | 6 | Séries numériques

Étudier la convergence et calculer la somme de la série  $\sum u_n$  où le terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln \left( 1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$$

#### Exercice [4277] | 7 | Somme d'une série

On considère la série numérique  $\sum u_n$  où :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left( \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)$ .

- Déterminer le terme général de la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$ .

- En déduire la convergence et la somme de la série  $\sum u_n$ .

#### Exercice [1331] | 8 | Lois marginales et lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires finies

La loi du couple aléatoire finies  $(X, Y)$  est donné par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2
3	$3\alpha$	$6\alpha$	$7\alpha$
7	$9\alpha$	$12\alpha$	$15\alpha$
37	0	0	$18\alpha$

- Déterminer la constante  $\alpha$ .
- Donner les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- Quelle est la loi de  $Y$  sachant que  $[X \leq 7]$  ?

#### Exercice [1248] | 9 | Couples de variables aléatoires

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètres respectifs  $p$  et  $r$  telles que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

#### Exercice [1253] | 10 | Indépendance d'un couple de variables aléatoires

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  avec  $n \geq 2$ . On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans cette urne. Soit  $X$  (resp.  $Y$ ) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. plus grand) des deux numéros tirés.

- Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  et en déduire les lois de  $X$  et  $Y$ .
- Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(Y)$ .
- $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

#### Exercice [4400] | 11 | Maximum d'une famille de variables aléatoires de même loi

Dans tout cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes définie sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

On désigne alors par  $Y$  la variable aléatoire égale au maximum des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , c'est à dire que  $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

- Déterminer la loi de  $Y$ .
- Montrer que  $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \right)^n$ .