Question de cours - 5 minutes - 2 points

Les énoncés ci-contre pourront vous être demandés explicitement avec toutes leurs hypothèses, avec ou sans démonstration:

- CL01 - Théorème 1 - Sommes des premiers entiers et puissances
- CL01 - Théorème 2 - Formule de Pascal | Construction du tableau jusqu'à la ligne $n = 6$
- CL01 - Théorème 3 - Formule du binôme de Newton

Pratique calculatoire - 15/20 minutes - 8 points

Utilisation de la formule du binôme pour développer et simplifier une expression de la forme $(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^n$ avec $n \geq 4$

et

Résolution complète par échelonnement réduit en lignes d'un système linéaire de taille 3×3

La résolution doit se faire impérativement par un échelonnement réduit en lignes en respectant l'algorithme de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires.
Toute résolution ne respectant pas ce point ne sera pas acceptée par votre interrogateur.

Thématique(s) de la semaine - 30 minutes - 10 points

Un ou plusieurs exercice(s) vous sera(ont) proposé(s) par votre interrogateur tels ceux proposés dans la banque d'exercices ci-après.
Ils porteront sur les chapitres et savoir-faire détaillés ci-dessous.

TX01 | Manipuler les écritures fractionnaires

- Tout. . .

TX02 | Manipuler les puissances et les radicaux

- Tout. . .

TX03 | Calcul algébrique

- Tout. . .

TX04 | Opérations avec $\ln$ et $\exp$

- Tout. . .

TX05 | Équations de degré 1 ou 2 et s'y ramenant

- Tout. . .

AL01 | Représentation matricielle des systèmes linéaires

- Reprise programme précédent

AL02 | Échelonnement de systèmes linéaires

- Reprise programme précédent

CL01 - Calculs de sommes et de produit finis

- Reprise programme précédent
- Factorielle et coefficient binomiaux
- Triangle de Pascal
- Formule du binôme de Newton

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Résoudre un système par échelonnement réduit
- Expliciter les solutions d'un système linéaire
- Déterminer le rang d'un système
- Utiliser les formules de sommes usuelles
- Faire un changement d'indice dans une somme
- Utiliser le triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux
- Développer une expression à l'aide du binôme de Newton

Programme à venir

Calculs de sommes | Nombres complexes

Pour la pratique calculatoire

Exercice| [2740] | 1| Sytème linéaire 3×3

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnue le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ci-dessous :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

Exercice| [5007] | 2| Utilisation du binôme de Newton

Développez puis réduire les expressions suivantes :

$$\boxed{A = (2x - 5)^5} \qquad \boxed{B = (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^6}$$

Sur l'ensemble du programme

Exercice| [2278] | 3| Système 2×2

Résoudre le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} -4x + 5y = -9 \\ 12x - 3y = 7 \end{cases}$.

Exercice| [3124] | 4| Systèmes linéaires

Pour chacun des deux systèmes suivants donnés sous leur forme matricielle, déterminer leur rang, leur comptabilité et lorsque c'est le cas l'ensemble de leur(s) solution(s).

$$\mathcal{S}_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Exercice| [2133] | 5| Systèmes linéaires

Pour les deux systèmes suivants :
- Déterminer le rang du système ;
- Déterminer la matrice échelonnée réduite du système ;
- Le résoudre.

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 5y + 6z = -11 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -2t + x - 2y + 3z = -12 \\ -t + x - y + z = -5 \\ 2t + 2x + 3y - z = 15 \\ -2t + 4x + y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice| [1061] | 6| Systèmes à paramètres

Discuter et résoudre en fonction du paramètre réel a les systèmes linéaires d'inconnue le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}_1 \; : \; \begin{cases} x + y = 1 \\ x + a^2 y = a \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} (a-1)x + 2ay = -2 \\ 2ax - (a-1)y = a - 1 \end{cases}$$

Exercice| [1062] | 7| Systèmes à paramètres

Discuter et résoudre en fonction de m :

$$\begin{cases} mx + y + z = X \\ x + my + z = Y \\ x + y + mz = Z \end{cases} \qquad \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases} \qquad \begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$$

Exercice| [2977] | 8| Calcul de somme finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S = \displaystyle\sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{3^{k+1}}{4^k} \right)$.

Exercice| [2700] | 9| Changement d'indice

Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{50} \frac{k^2 - k - 2}{k - 2}$ en utilisant le changement d'indice $j = k - 2$.

Exercice| [3008] | 10| Sommes téléscopiques

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2 + k - 2}{(k+3)^2} \right)$.

Exercice| [2505] | 11| Somme téléscopique

Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ où $n \geq 2$.

Exercice| [2999] | 12| Calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$.

Exercice| [2998] | 13| Manipuler les factorielles et les coefficients du binôme

(1). Calculer $\binom{100}{98}$ et $\binom{40}{39}$.

(2). Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $A = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$.

Exercice| [1767] | 14| Sommes

Soit n un entier naturel non nul.

(1). En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, calculer $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

(2). Sur le même principe, calculer $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice| [0349] | 15| Calcul de somme

Calculer la somme :

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + 111\ldots1$$

le dernier terme de cette somme étant formé de n chiffres 1.

Exercice| [1781] | 16| Sommes

Soit n un entier naturel non nul.

(1). Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(2). On considère un réel $p \in]0;1[$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(3). Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

(4). Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k+1} k = 3n4^{n-1}$.

Exercice| [2997] | 17| Manipuler les factorielles et les coefficients du binôme

(1). Calculer $\binom{30}{2}$ et $\binom{30}{29}$.

(2). Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $A = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$.

Exercice| [3002] | 18| Calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k-1}$.

Exercice| [3001] | 19| Calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k+1} 2^{n-3k}$.

Exercice| [2036] | 20| Calculs de sommes

Soient k, p et n trois entiers vérifiant $0 \leq k \leq p \leq n$.

(1). Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

(2). En déduire une expression simplifiée de $S = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.