Thématique(s) de la semaine

AL09 | Noyau et image d'une matrice

- Reprise programme précédent

AL10 | Applications linéaires

- Reprise programme précédent

AL11 | Matrices d'applications linéaires

- Matrice d'une application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ puis de $\mathcal{L}(E, F)$
- Caractérisation des isomorphismes ou des automorphismes par leur représentation matricielle
- Formules de changement bases (ne pas interroger)

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Construire la matrice d'une application linéaire
- Utiliser la matrice d'une application linéaire pour le calcul d'image d'un vecteur
- Utiliser la matrice d'une application linéaire pour la recherche d'éléments du noyau
- Utiliser la matrice d'une application linéaire pour la recherche d'une base de l'image

Programme à venir...

Programme à l'identique

Pour se préparer

EX. 1 | Réf. 4918

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y + z, x - 2y + z, -x - y + 2z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. f est-elle un automorphisme ?

EX. 2 | Réf. 1478

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & M + (b+c)I_2 + (a+d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. f est-elle un automorphisme ?

EX. 3 | Réf. 3640

Soit $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 3(X+2)P - \left(X^2-1\right)P' \end{array} \right.$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_3[X]\right)$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. f est-elle bijective ?

EX. 4 | Réf. 3634

On considère l'application f donnée par : $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ c+bX+aX^2 & \longmapsto & (-c+2b+a)+(b+a)X+(2c-2b+4a)X^2 \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
4. Qu'en déduire pour f ?

EX. 5 | Réf. 3649

On considère l'application f donnée par :

$$f: \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{-a+2d}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{2b-c}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les images par f de vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. En déduire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer alors le rang de f.
5. f est-elle un automorphisme ?

EX. 6 | Réf. 3633

On considère l'application f donnée par : $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
4. Qu'en conclure pour f ?

EX. 7 | Réf. 3644

Soit $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array} \right.$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. f est-elle bijective ?

EX. 8 | Réf. 0418

Dans tout ce qui suite, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère alors $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array} \right.$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. T est-il un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

EX. 9 | Réf. 0393

On désigne par T l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $T(3,1) = (2,-4)$ et $T(1,1) = (0,2)$.

1. Calculer $T(7,4)$.

2. Justifier que T est en fait un automorphisme.

3. Calculer alors $T^{-1}(5,-3)$.