Thématique(s) de la semaine

AL09 | Noyau et image d'une matrice

- Reprise programme précédent

AL10 | Applications linéaires

- Reprise programme précédent

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent

Programme à venir...

Matrice d'une application linéaire et applications

Pour se préparer

EX. 1 | Réf. 5233

Montrer que l'application f donnée par $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

EX. 2 | Réf. 5234

Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que l'application f donnée par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z)u + (x-y+z)v + (2x+y-z)w \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

EX. 3 | Réf. 5235

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que l'application f donnée par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + AM + MA^2 \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

EX. 4 | Réf. 3587

Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

EX. 5 | Réf. 5225

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille formées par les colonnes de la matrice A est une famille liée.
2. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les quatre colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 de A.
3. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

EX. 6 | Réf. 5226

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. À quelle(s) condition(s) sur B le système linéaire de représentation matricielle $(A|B)$ admet-il des solutions ?
2. Déduire de ce qui précède une description de $\mathrm{Im}\,(A)$ à l'aide d'équations.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A)$ est une droite vectorielle que l'on identifiera.
4. Montrer que la famille de matrices colonnes formée par les colonnes de A est une famille liée, puis en déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

EX. 7 | Réf. 3619

Soit $u_1 = (1, -1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1)$, $u_4 = (-1, 1, 2, 0)$ et $u_5 = (-1, -4, -1, -2)$.
Déterminer les relations de dépendances entre ces vecteurs.

EX. 8 | Réf. 3589

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

EX. 9 | Réf. 3441

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$ est un endomorphisme.
2. Dans le cas où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, f est-il un automorphisme ?