Thématique(s) de la semaine

AL09 | Noyau et image d'une matrice

- Application $f : X \longmapsto AX$
- Noyau d'une matrice
- Image d'une matrice
- Famille génératrice de l'image d'une matrice

AL10 | Applications linéaires

- Application linéaire
- Propriétés structurelles de $\mathcal{L}(E, F)$
- Noyau et image d'une application linéaire
- Image et noyau d'une application linéaire
- Famillle génératrice de l'image
- Applications linéaires injectives, surjectives et bijective
- Lien injectivité et noyau
- Lien surjectivité et image
- Théorème du rang
- Caractérisation des isomorphismes, des automorphismes et des bases

Exemples de savoir faire à maîtriser

- Reprise programme précédent
- Déterminer le noyau d'une matrice
- Déterminer l'image d'une matrice
- Montrer qu'une application est linéaire
- Déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire
- Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire

Programme à venir. . .

Reprise programme

Pour se préparer

EX. 1 | Réf. 5233

Montrer que l'application f donnée par $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

EX. 2 | Réf. 5234

Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que l'application f donnée par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y+z)u + (x-y+z)v + (2x+y-z)w \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

EX. 3 | Réf. 5235

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que l'application f donnée par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + AM + MA^2 \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

EX. 4 | Réf. 3587

Déterminer le noyau et l'image de $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & -3\\ -2 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 2 & -3 & -1\\ 3 & -2 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

EX. 5 | Réf. 5225

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille formées par les colonnes de la matrice A est une famille liée.
2. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par les quatre colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 de A.
3. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

EX. 6 | Réf. 5226

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. On considère une matrice colonne $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{pmatrix}$ quelconque de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. À quelle(s) condition(s) sur B le système linéaire de représentation matricielle $(A|B)$ admet-il des solutions ?
2. Déduire de ce qui précède une description de $\mathrm{Im}\,(A)$ à l'aide d'équations.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A)$ est une droite vectorielle que l'on identifiera.
4. Montrer que la famille de matrices colonnes formée par les colonnes de A est une famille liée, puis en déduire une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

EX. 7 | Réf. 3619

Soit $u_1=(1,-1,2,1)$, $u_2=(-1,2,1,0)$, $u_3=(1,1,0,1)$, $u_4=(-1,1,2,0)$ et $u_5=(-1,-4,-1,-2)$.
Déterminer les relations de dépendances entre ces vecteurs.

EX. 8 | Réf. 3589

Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $M_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M_3=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

EX. 9 | Réf. 3441

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & AM-MA\end{array}\right.$ est un endomorphisme.
2. Dans le cas où $n=2$ et $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, f est-il un automorphisme ?